Annales du concours d'entrée à l'ITII

Question 1 Calculer :

$$\cos^6 x - \cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^4 x + \sin^6 x = 0$$

voir détails ci-après

Exprimer $cos^2\, a$ et $sin^2\, a$ en fonction de $cos\, 2a$:

$cos^2\, a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$	$sin^2\, a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

En déduire des réels a, b, c, d tels que l'égalité ci-dessous soit valable pour tout réel x :

$$\cos^6 x - \sin^6 x = a + b \cdot \cos 2x + c \cdot \cos 4x + d \cdot \cos 6x$$

$a = 0$ $\quad$ $b = \dfrac{15}{16}$ $\quad$ $c = 0$ $\quad$ $d = \dfrac{1}{16}$

Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^6 x - \sin^6 x\right) dx = \frac{11}{24}$$

Question 1 :

$*$ $\cos^6 x - \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x + \sin^6 x$

$= \cos^4 x\left(\cos^2 x - 1\right) + \sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x\left(1 - \sin^2 x\right)$

$= -\cos^4 x . \sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x \cos^2 x$

$= \sin^2 x \cos^2 x \left(\underbrace{-\cos^2 x + 1 - \sin^2 x}_{-1+1}\right) = 0$

$*$ $\cos^6 x - \sin^6 x = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^3$

$= \frac{1}{8}\left[\left(\cancel{1} + 3\cos(2x) + \cancel{3\cos^2(2x)} + \cos^3(2x)\right) - \left(\cancel{1} - 3\cos(2x) + \cancel{3\cos^2(2x)} - \cos^3(2x)\right)\right]$

$\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{1}{8}\left[6\cos(2x) + 2\cos^3(2x)\right]$

$\cos^3 2x = \cos(2x) \times \cos^2(2x) = \cos(2x) \times \frac{1+\cos(4x)}{2}$

$\cos^3 2x = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\cos(4x)$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

Donc $\cos^3 2x = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(6x) + \frac{1}{4}\cos(2x)$

$\cos^3(2x) = \frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(6x)$

Et $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{1}{8}\left(6\cos 2x + \frac{3}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 6x\right)$

$\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{1}{16}\left(15\cos 2x + \cos 6x\right)$

$*$ $\int_0^{\pi/4}\left(\cos^6 x - \sin^6 x\right)dx = \frac{1}{16}\int_0^{\pi/4}\left(15\cos 2x + \cos 6x\right)dx$

$= \frac{1}{16}\left[\frac{15}{2}\sin 2x + \frac{1}{6}\sin 6x\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{16}\left(\frac{15}{2} - \frac{1}{6}\right)$

$= \frac{44}{16 \times 6} = \frac{11}{24}$