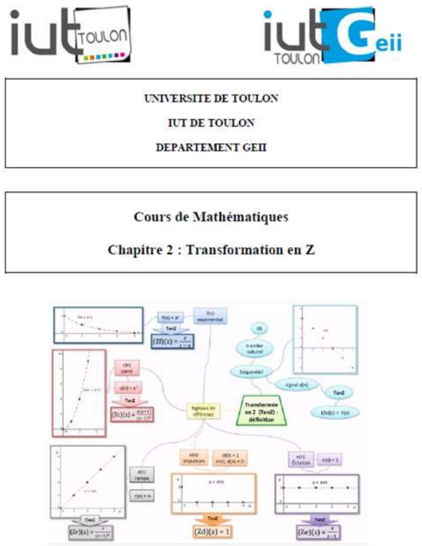
TP8-9 Transformation en Z et produit de convolution

- Consignes à suivre pour les TP à distance :

  - Sur discord en partage d'écran, à votre rythme.

- Programme de la séance :


UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 2 : Transformation en Z

- Corrigé du DM sur la TZ Ex1 à 3,
- vidéo sur le produit de convolution,
- ex4 du DM,
- question supplémentaire à l'ex3 du DM : Déterminer la réponse à $x(k)=2^{-k}$,
- produit de convolution rect*rect.

<u>Exercice 1</u> **Transformation en Z (4,5 pts)** À Etudier avec le corrigé

Déterminer la transformées en Z des séquences {f(k)} de période 1 définies par :

$f(k)=k^2.U(k)$; $f(k)=(k+2)^2U(k-1)$; $f(k)=\dfrac{e^k}{e^{2k}}.U(k)$

Ex 1 :

- $f(k) = k \cdot k\, \mathcal{U}(k)$

$T_Z(f(k)) = T_Z(k \cdot g(k))$ où $g(k) = k \cdot \mathcal{U}(k)$

$= -z\, G'(z)$ où $G(z) = T_Z(k \cdot \mathcal{U}(k)) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$

$= -z \left(\dfrac{z}{(z-1)^2} \right)'$

$= -z \left(\dfrac{(z-1)^2 - 2z(z-1)}{(z-1)^4} \right)$

$= -z \left(\dfrac{z-1-2z}{(z-1)^3} \right)$

$= -z\, \dfrac{-z-1}{(z-1)^3}$

$F(z) = \dfrac{z^2+z}{(z-1)^3}$

retard de 1.

- $f(k) = (k+2)^2 . u(k-1)$

$f(k) = ((k-1)+3)^2 . u(k-1)$

$Tz(f(k)) = z^{-1} . Tz((k+3)^2 . u(k))$

$= z^{-1} . Tz(k^2 + 6k + 9)$

$= z^{-1} . \left(\frac{z^2+z}{(z-1)^3} + 6 \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{9z}{z-1} \right)$

$F(z) = \frac{z+1}{(z-1)^3} + \frac{6}{(z-1)^2} + \frac{9}{z-1}$

- $f(k) = \frac{e^k}{e^{2k}} . u(k) = e^{-k} . u(k)$

$F(z) = \frac{z}{z-e^{-1}} = \frac{ez}{ez-1}$

<u>Exercice 2</u> **Transformation en Z inverse (2,5 pts)** Idem

Déterminer la transformée inverse de la fonction suivante ($T_e = 1$) :

$$F(z) = \frac{z-2\sqrt{2}}{z^2 - 4z\sqrt{2} + 16}$$

Ex2 $F(z) = \dfrac{z - 2\sqrt{2}}{z^2 - 4\sqrt{2}\,z + 16}$

. $a = 4$; $-4\sqrt{2} = -2a\cos\omega \iff \cos\omega = \dfrac{4\sqrt{2}}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On peut choisir $\omega = \dfrac{\pi}{4}$

Réth1 :

. $\dfrac{4z\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{z^2 - 8z\cos\frac{\pi}{4} + 4^2} = T_z\left(4^k \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)$

$T_z\left(4^k \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{2\sqrt{2}\,z}{z^2 - 4z\sqrt{2} + 16}$

Donc

$T_z^{-1}\left[F(z)\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\, T_z^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{2}\,z}{z^2 - 4z\sqrt{2} + 16}\right) - T_z^{-1}\left(z^{-1}\dfrac{2\sqrt{2}\,z}{z^2 - 4z\sqrt{2} + 16}\right)$

$f(k) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\, 4^k \sin\left(\dfrac{k\pi}{4}\right) u(k) - 4^{k-1} \sin\left(\dfrac{(k-1)\pi}{4}\right) u(k-1)$

Nd th 2 :

$$\frac{z^2 - 4z\cos(\pi/4)}{z^2 - 8z\cos(\pi/4) + 4^2} = T_z\left(4^k \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)$$

$$T_z\left(\underbrace{4^k \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)}_{h(k)}\right) = \frac{z^2 - 2\sqrt{2}z}{z^2 - 4z\sqrt{2} + 16} = H(z)$$

Donc

$$T_z^{-1}\left[F(z)\right] = T_z^{-1}\left[\underset{\text{retard de 1}}{z^{-1}} \overbrace{\frac{z^2 - 2\sqrt{2}z}{z^2 - 4z\sqrt{2} + 16}}^{H(z)}\right] = h(k-1) \cdot U(k-1)$$

$$f(k) = 4^{k-1} \cos\left(\frac{(k-1)\pi}{4}\right) \cdot u(k-1)$$

<u>Exercice 3</u> (9.5 pts)

Idem

Soit l'équation aux différences : $2y(k) - 3y(k-1) + y(k-2) = x(k)$.

1) Déterminer H(z) la fonction de transfert
2) Déterminer la réponse impulsionnelle (lorsque x est l'impulsion de Dirac)
3) Déterminer la réponse lorsque x(k)=U(k-1).

① On pose $Y(z) = Tz(y(k))$

L'équation devient :

$$2Y(z) - 3z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$(2 - 3z^{-1} + z^{-2})\,Y(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2 - 3z^{-1} + z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{z^2}{2z^2 - 3z + 1}$$

② Si $x(k) = \delta(k)$, alors $X(z) = 1$ et :

$$Y(z) = X(z)\,H(z)$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{2z^2 - 3z + 1} = z \cdot G(z)$$

où
$$G(z) = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1}$$

$$2z^2 - 3z + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \qquad z_1 = \frac{3+1}{4} = 1 \text{ et } z_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc
$$2z^2 - 3z + 1 = 2(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right) = (z-1)(2z-1)$$

$$G(z) = \frac{z}{(z-1)(2z-1)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{2z-1}$$

$$a = \Big[(z-1)\,G(z)\Big]_{z=1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \Big[(2z-1)\,G(z)\Big]_{z=1/2} = \frac{1/2}{-1/2} = -1$$

Donc $G(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{2z-1}$

et

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{2z-1} = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\,\frac{z}{z-1/2}$$

$$y(k) = u(k) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot u(k) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) u(k).$$

4

③ Si $x(k) = u(k-1)$, alors $X(z) = z^{-1}\dfrac{z}{z-1}$

$$X(z) = \frac{1}{z-1} \text{ et } Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(2z-1)} = z \cdot G(z)$$

où $$G(z) = \frac{z}{(z-1)^2(2z-1)} = \frac{a_2}{(z-1)^2} + \frac{a_1}{z-1} + \frac{b}{2z-1}$$

$$a_2 = \left[(z-1)^2 G(z)\right]_{z=1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \left[(2z-1)\,G(z)\right]_{z=1/2} = \frac{1/2}{(-1/2)^2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{z\to+\infty} z\,G(z) = 0 = a_1 + \frac{b}{2} \iff a_1 = -\frac{b}{2} = -1$$

Donc $Y(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2} - \dfrac{z}{z-1} + \dfrac{2z}{2z-1}$

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-1/2}$$

$$y(k) = k \cdot u(k) - u(k) + \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot u(k)$$

$$y(k) = \left(k - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) u(k)$$

Exercice 4 **Produit de convolution** $(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)\,du$ **(4 pts)**

Calculer le produit de convolution des fonctions f et g définies par :

$f(t)=\mathrm{rect}(t)$ et $g(t)=e^{-3t}.U(t)$ où rect est la fonction rectangle, définie par :

$$\mathrm{rect}(t)=\begin{cases}1 \text{ si } |t|\le \frac{1}{2}\\ 0 \text{ si } |t|>\frac{1}{2}\end{cases}$$

, et U est la fonction échelon-unité (ou de Heaviside)

On visionnera d'abord la vidéo sur le produit de convolution, puis on étudiera le corrigé ci-après.

Envoyez-moi vos brouillons sur Discord.

Ex 4

$$(f*g)(t) = \text{rect}(t) * e^{-3t} \cdot u(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(u) \cdot e^{-3(t-u)} u(t-u)\, du$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-3(t-u)} u(t-u)\, du$$

On pose $x = t - u$ alors $dx = -du$

$u = -1/2 \iff x = t + 1/2$

$u = 1/2 \iff x = t - 1/2$

$$(f*g)(t) = \int_{t+1/2}^{t-1/2} e^{-3x} \cdot u(x) \cdot (-dx)$$

$$(f*g)(t) = \int_{t-1/2}^{t+1/2} e^{-3x} \cdot u(x)\, dx$$

__Cas 1__ : $t+1/2 < 0 \iff t < -1/2$

alors $(f*g)(t) = 0$

__Cas 2__ : $t-1/2 \leq 0 \leq t+1/2 \iff -1/2 \leq t \leq 1/2$

alors $(f*g)(t) = \int_{0}^{t+1/2} e^{-3x} dx = \left[-\frac{e^{-3x}}{3} \right]_0^{t+1/2}$

$$= -\frac{1}{3}\left(e^{-3(t+1/2)} - 1 \right)$$

$$(f*g)(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t-3/2}\right)$$

Cas 3 : $0 \leq t - 1/2 \iff t \geq 1/2$

alors $(f*g)(t) = \displaystyle\int_{t-1/2}^{t+1/2} e^{-3x}\,dx = \left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_{t-1/2}^{t+1/2}$

$$= -\frac{1}{3}\left(e^{-3(t+1/2)} - e^{-3(t-1/2)}\right)$$

$$(f*g)(t) = \frac{1}{3}e^{-3t}\left(e^{3/2} - e^{-3/2}\right) = \frac{2}{3}e^{-3t} \cdot sh(3/2)$$

Question supplémentaire : Reprendre l'ex 3 du DM.

On rappelle que $H(z) = \dfrac{z^2}{2z^2 - 3z + 1}$

Exercice 3 **(9.5 pts)**

Soit l'équation aux différences : $2y(k) - 3y(k-1) + y(k-2) = x(k)$.

1) Déterminer H(z) la fonction de transfert
2) Déterminer la réponse impulsionnelle (lorsque x est l'impulsion de Dirac)
3) Déterminer la réponse lorsque x(k)=U(k-1).
4) " " $x(k) = 2^{-k} \cdot U(k)$

J'attends vos brouillons sur Discord...

④ Si $x(k) = 2^{-k} \cdot \mathcal{U}(k)$ alors $X(z) = \dfrac{z}{z - 1/2} = \dfrac{2z}{2z-1}$

Alors $Y(z) = \dfrac{2z^3}{(z-1)(2z-1)^2} = z \cdot G(z)$

où $G(z) = \dfrac{2z^2}{(z-1)(2z-1)^2} = \dfrac{a}{z-1} + \dfrac{b_2}{(2z-1)^2} + \dfrac{b_1}{2z-1}$

$a = \Big[(z-1)\,G(z)\Big]_{z=1} = \dfrac{2}{1} = 2$

$b_2 = \Big[(2z-1)^2\,G(z)\Big]_{z=1/2} = \dfrac{2(1/4)}{(-1/2)} = -1$

$\lim\limits_{z \to +\infty} z\,G(z) = \dfrac{1}{2} = a + \dfrac{b_1}{2} \iff b_1 = 1 - 2a = 1-4 = -3$

Donc $Y(z) = 2\,\dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z}{4(z-1/2)^2} - \dfrac{3z}{2(z-1/2)}$

$y(k) = 2\,\mathcal{U}(k) - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+2} k\,\mathcal{U}(k) - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}\mathcal{U}(k)$

Calculer $\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)$ ou $(\mathrm{rect} * \mathrm{rect})(t)$

J'attends vos brouillons sur discord...