Chapitre 8 : Séries entières

I. Etude d'une série entière :

1) Définition

On appelle série entière, toute série de fonctions de terme général $U_n(x) = a_n.x^n$ où (a_n) est une suite de nombres réels ou complexes et x est une variable réelle ou complexe.

Remarque Si x=0, alors $u_n=0$ et la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

2) Domaine de convergence .

Théorème d'Abel : Pour toute série entière $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.x^n$ il existe un réel R>0 tel que :

- **$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.x^n$ converge absolument si $|x| < R$**
- **$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.x^n$ diverge si $|x| > R$**

R est appelé le rayon de convergence de la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.x^n$

Le domaine de convergence de $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.x^n$ est alors un des quatre intervalles :

$[-R,R]$, $[-R,R[$, $]-R,R[$, $]-R,R]$, si x est un réel, ou bien D(0,R) un disque de centre 0 et de rayon R, avec ou sans points sur le cercle C(0,R), si x est un complexe.

Remarques Si $R=\infty$, alors $D_c= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ Si R=0, alors $D_c=\{0\}$

3) Détermination du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.x^n$

Critère de D'Alembert : Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, alors $\begin{cases} R = \frac{1}{L} \text{ si } L \neq 0 \\ R = \infty \text{ si } L = 0 \\ R = 0 \text{ si } L = \infty \end{cases}$

Critère de Cauchy : Si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$, alors $\begin{cases} R = \frac{1}{L} \text{ si } L \neq 0 \\ R = \infty \text{ si } L = 0 \\ R = 0 \text{ si } L = \infty \end{cases}$

II. Convergence uniforme et continuité :

1) Continuité

Toute série entière de rayon de convergence R converge uniformément sur tout compact de $\left]-R,R\right[$ ou de D(0,R)
Comme les fonctions U_n sont continues, il en est alors de même pour S la fonction définie par : $S(x)=\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.x^n \quad \forall |x|<R$.

2) Théorème des zéros isolés

Soit $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.x^n$ **, une série entière de rayon de convergence R et de somme f(x).**
Si les coefficients a_n ne sont pas tous nuls, alors il existe un réel r avec 0<r<R, tel que :

$$0<|x|<r \quad \Rightarrow \quad f(x)\neq 0$$

Conséquence

Soient $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.x^n$ **et** $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n.x^n$ **, deux séries entières de même rayon de convergence R, et qui ont pour sommes respectives f et g :**

$$\forall\ |x|<R\ ,\ f(x)=g(x) \ \Rightarrow\ \forall\, n,\ a_n=b_n$$

III. Opérations sur les séries entières :

1) Multiplication par un scalaire

Théorème : Soit la série entière $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.x^n$ **de rayon de convergence R, de somme f(x), et une constante $\lambda\neq 0$. On démontre que la série entière** $\sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda a_n.x^n$ **a un rayon de convergence égal à R, et pour somme λ f(x).**

2) Addition et multiplication

Théorème : Soient $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.x^n$ **et** $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n.x^n$ **, deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_1 et R_2 et de sommes respectives f et g :**

- La série entière $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n+b_n).x^n$ **a pour rayon de convergence**

$$R=\begin{cases}\inf(R_1,R_2)\ \text{si}\ R_1\neq R_2\\ \geq R_1\ \text{si}\ R_1=R_2\end{cases}$$ **et pour somme** $f(x)+g(x)$ **si** $|x|<\inf(R_1,R_2)$.

- La série entière $\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right).x^n$ a pour rayon de convergence $R \geq \inf(R_1, R_2)$ et pour somme $f(x)\times g(x)$ si $|x| < \inf(R_1, R_2)$.

3) Dérivation, intégration

Théorème : Soit la série entière $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.x^n$ de rayon de convergence R, de somme f(x). On démontre que la série entière $\sum_{n=n_0}^{\infty} n(n-1)...(n-p+1)a_n.x^{n-p}$ a un rayon de convergence égal à R, et pour somme $f^{(p)}(x)$ si $|x| < R$

Remarques : f(0)=……….. ; f'(0)= ……….. ; f''(0)=……….. ; … ; $f^{(p)}(0)$=…………

Donc $|x| < R$ $f(x) =$ ………………………………………………

Théorème : Soit la série entière $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.x^n$ de rayon de convergence R, de somme f(x). On démontre que la série entière $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.\frac{x^{n+1}}{n+1}$ a un rayon de convergence égal à R, et pour somme F(x) si $|x| < R$, où F est la primitive de f qui s'annule pour x=0.

IV. Développement en série entière d'une fonction f(x)

Etant donné une fonction f, supposons qu'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$, de rayon de convergence $R \neq 0$, telle que : $\forall |x| < R,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$, alors, d'après la remarque précédente : $\forall |x| < R \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n$

Cette série est appelée développement en série entière de la fonction f au voisinage de zéro. Elle est unique.

Conséquence Si f est une fonction paire, son développement ne contient que des puissances paires. Si f est une fonction impaire, il ne contient que des puissances impaires.

1) Développement au moyen de la formule de Mac Laurin

Série de Mac-Laurin Si f, une fonction infiniment dérivable sur un intervalle]-R ;R[, est telle qu'il existe un réel A>0 avec : $\forall n \in IN, \forall x \in \left]-R; R\right[\ \left|f^{(n)}(x)\right| < A$, alors f admet un développement en série entière de rayon de convergence au moins égal à R.

et on obtient alors : $\forall |x| < R \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} . x^n$

Exemple

$f(x)=e^x$: ……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

f(x)=sinx :……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

2) Développement au moyen d'une dérivation

f(x)=cos(x) :…………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

3) Développement au moyen d'une intégration, division, changement de variable, combinaison linéaire, équation différentielle

Exemples : $\frac{1}{1-x}$, e^{-x}, chx, ln(1-x), $\frac{1}{(1-x)^2}$, $(1+x)^\alpha$

4) Développement en série entière et développement limité

Supposons que $\forall |x| < R,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$, on démontre alors que quel que soit n, il existe une fonction $\varepsilon(x)$ tendant vers $\varepsilon(0) = 0$ quand x tend vers 0, telle que $\forall |x| < R,\ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$.

IV. Exercices

Exercice 1 **:** Déterminer le rayon de convergence R et vérifier s'il y a convergence aux extrémités de l'intervalle de convergence lorsque R est fini.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \text{ avec } \alpha \geq 0. \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (1+\frac{1}{n})^n x^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n^2-n} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$$

Exercice 2 : Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{3^n} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$$

Exercice 3 : Développer en série entière les fonctions :

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad f(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x-2)} \qquad f(x) = \cos^2 x \qquad f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Exercice 4 : Soit une série entière $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ solution de l'équation différentielle :

$$4xy''+2y'-y = 0 \text{ telle que } y(0) = 1.$$

Déterminer a_0 et montrer que les coefficients de la série vérifient la relation récurrente :

$a_n = \frac{a_{n-1}}{2n(2n-1)}$. En déduire y=y(x).