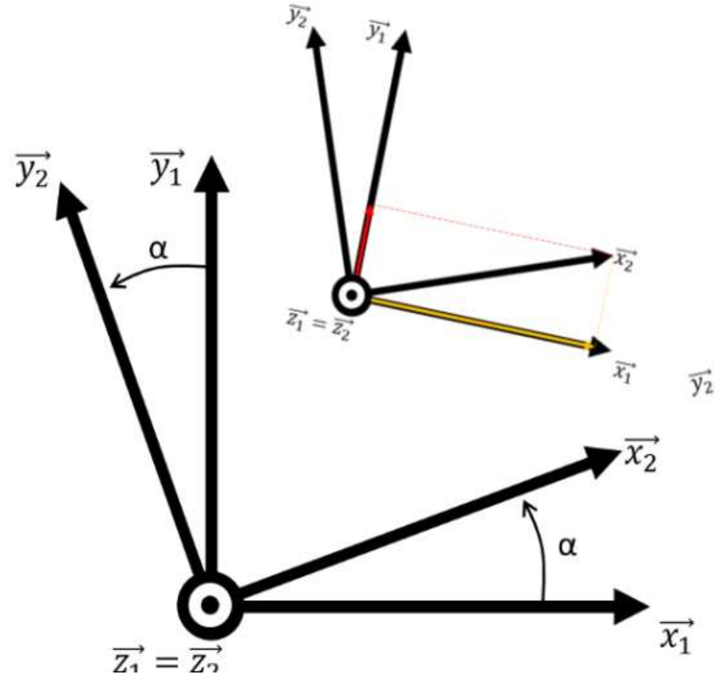
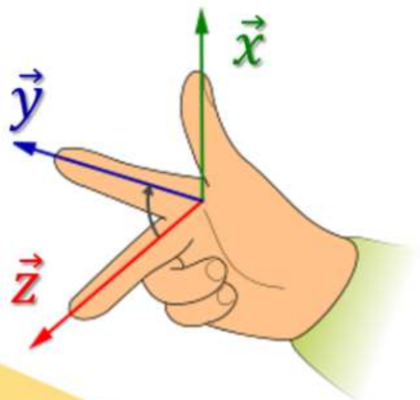
Cours de Mathématiques

Chapitre 1 : Calcul vectoriel





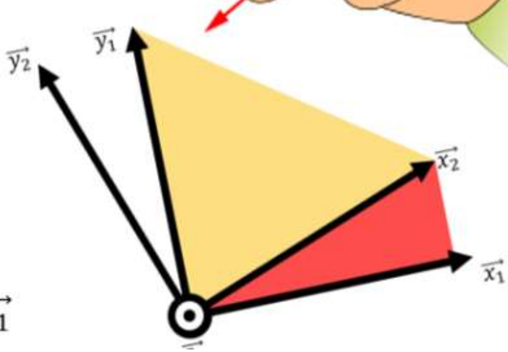


Table des matières

Partie A : Rappels sur le calcul vectoriel

I. Produit scalaire de deux vecteurs :

1) Définition

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un scalaire et est noté : $\vec{u}.\vec{v}$
Il est défini de la manière suivante : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\alpha)$ où $\alpha = (\vec{u},\vec{v})$ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de normes respectives $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

Vocabulaire : on appelle **vecteur unitaire**, tout vecteur dont la norme est égale à 1.
Soit $\vec{v}$, un vecteur non nul, alors $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ est unitaire.

2) Conséquences et propriétés

. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ car ……………………………………………………………………..

. Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires ou orthogonaux est nul car

……………………………………………………………………………………………...

. $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

. $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|.\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

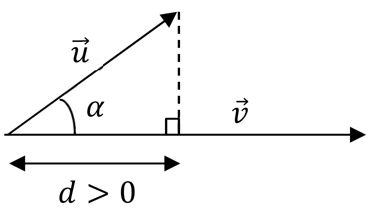
3) Application : formule d'Al-Kashi

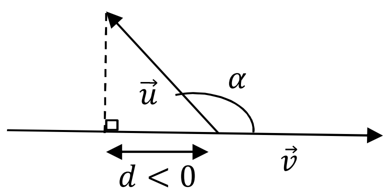
$$\boxed{\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\|\vec{u}\|,\|\vec{v}\|)}}$$

En effet : ………………………………………………………………………………

4) Projection d'un vecteur

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\alpha) = d.\|\vec{v}\|$ où d est la mesure algébrique de la projection orthogonale du vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{v}$





5) Vecteurs dans un plan muni d'une base orthonormée

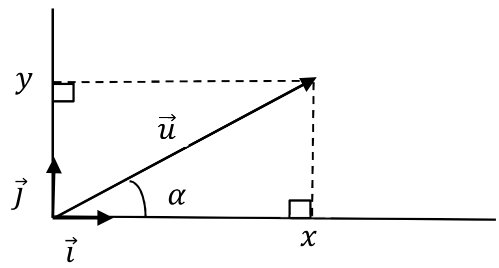
Un couple de vecteurs dans le plan $(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath})$ est appelé base, lorsque $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont non colinéaires. Une base de vecteurs $(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath})$ est dite orthonormée, lorsque les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ont leur norme égale à 1 et sont orthogonaux.
Ainsi on a : $\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = 1$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$.

Conséquences

Soit $\vec{u}$, un vecteur du plan de coordonnées (x,y) dans la base orthonormée $(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath})$:
$\vec{u} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath}$. On a alors :

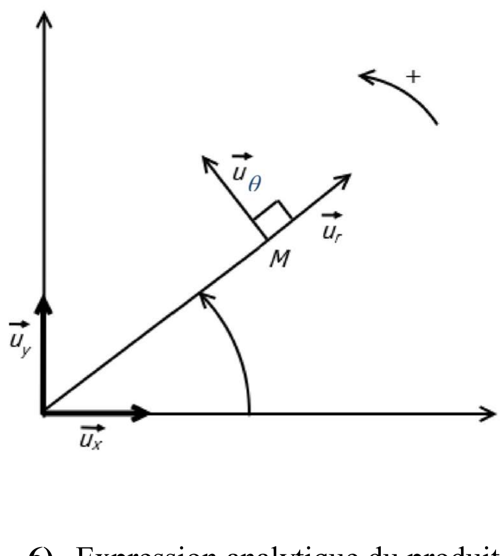
$\vec{u}.\vec{\imath} =$……………………………………………………………………………………

$\vec{u}.\vec{\jmath} =$……………………………………………………………………………………



x = ………………………………….. et y = …………………………………

Exercice d'application



Soient deux bases orthonormées $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ et $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ du plan, définies sur la figure ci-contre. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$, puis les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ dans la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

6) Expression analytique du produit scalaire

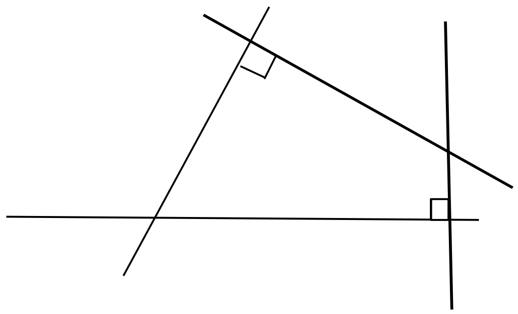
Soit $(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath})$ une base orthonormée du plan, dans laquelle les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées cartésiennes respectives (x,y) et (x',y').
Alors : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

En effet : ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

7) Propriété utile pour les exercices

Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes. Soient deux autres droites (D_1') et (D_2') telles que (D_1') est perpendiculaire à (D_1) et (D'_2) est perpendiculaire à (D_2). Les angles formés par les droites (D'_1) et (D'_2) sont égaux à ceux formés par les droites (D_1) et (D_2).



II. Vecteurs dans l'espace muni d'une base orthonormée (directe) :

1) Base orthonormée de l'espace :

Une triplet de vecteurs de l'espace $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelée base lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont linéairement indépendants* Une base de vecteurs de l'espace $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dite orthonormée, lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ont leur norme égale à 1 et sont deux à deux orthogonaux. Ainsi on a :
$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$; $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0$

* Cela signifie que :

$$\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

2) Expression du produit scalaire dans une base orthonormée :

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de l'espace, dans laquelle les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x,y,z) et (x',y',z'), ainsi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrivent de façon unique : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.
Alors : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

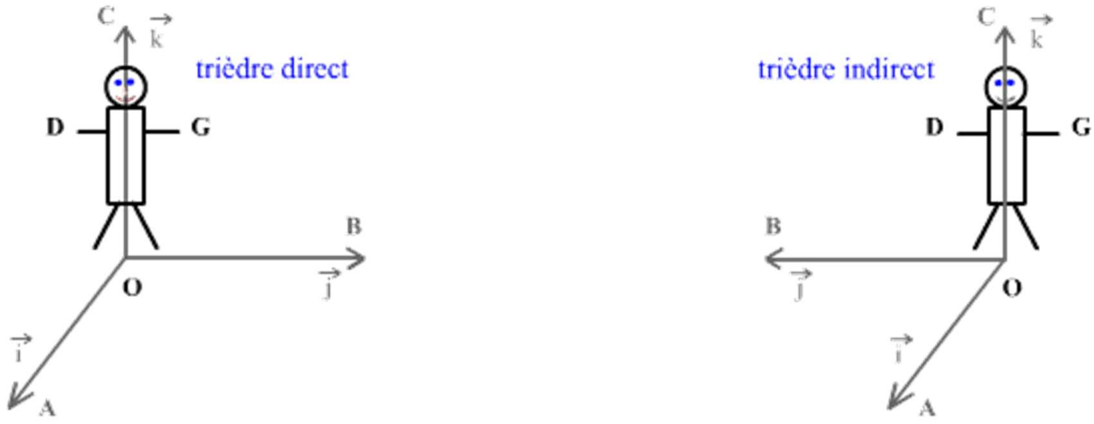
3) Comment orienter l'espace ?

La règle du bonhomme d'Ampère :

Considérons (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un repère de l'espace et A, B et C définis par :

$\overrightarrow{OA} = \vec{i}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$.

Imaginons un observateur les pieds en O, la tête en C, fixant le point A. Deux situations sont possibles et seulement deux :



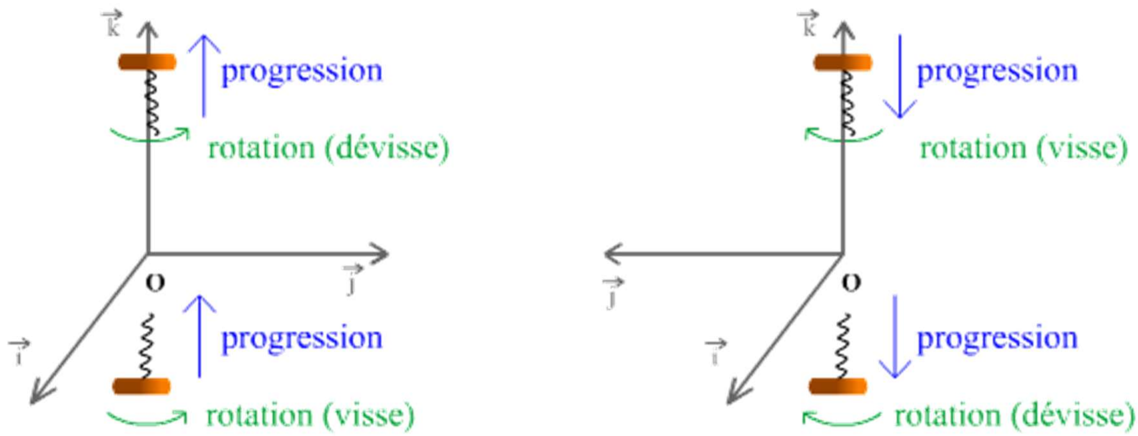
Situation 1 : Le point B est à gauche de l'observateur. Le repère est direct.

Situation 2 : Le point B est à droite de l'observateur. Le repère est indirect.

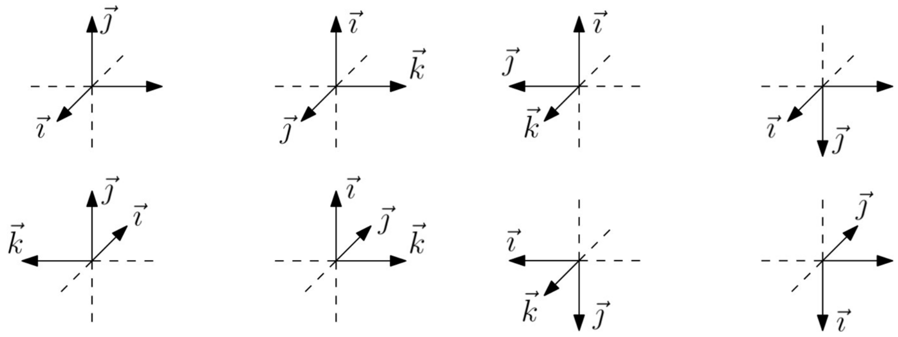
Orienter l'espace c'est distinguer ces deux types de repères.

Remarque La règle du tire-bouchon, permet aussi d'orienter rapidement l'espace.

Un tire-bouchon que l'on tourne dans le sens qui amène le vecteur $\vec{i}$ sur le vecteur $\vec{j}$, progresse dans le sens $\vec{k}$ si le trièdre ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est direct (sens - $\vec{k}$ si le trièdre ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est indirect).



Parmi les repères orthonormés suivants, lesquels sont directs ?



Conséquences importantes

a. La représentation traditionnelle d'une base orthonormale est celle d'une base directe.
b. Permuter deux vecteurs changent l'orientation de la base.
c. Pour toute base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) d'un plan et pour tout réel l > 0, il existe un seul vecteur $\vec{k}$ vérifiant : $\vec{k}$ est orthogonal à $\vec{i}$ et $\vec{j}$; ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) base directe ; $\|\vec{k}\| = l$.

4) Produit vectoriel :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace vectoriel.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini ainsi :

- **Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;**
- **Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,**
  - **a. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (direction) ;**
  - **b. ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$) est une base directe (sens) ;**
  - **c. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\,|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ (norme).**

Remarques :

a. Soit ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) une base orthonormale directe, que dire de :

$\vec{i} \wedge \vec{j}$ =........... ; $\vec{j} \wedge \vec{k}$ =.......... ; $\vec{k} \wedge \vec{i}$ =....... ; $\vec{j} \wedge \vec{i}$ =.......... ; $\vec{k} \wedge \vec{j}$ =.......... ;
$\vec{i} \wedge \vec{k}$ =.......

b. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux et unitaires, que dire de la base :($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$)

……………………………………………………………………………………..

Propriétes :

- **L'aire d'un triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right\|$.**
- **Le produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est nul si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. De ce fait les points A, B, C sont alignés si et seulement si $\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\vec{0}$.**
- **Quels que soient les vecteurs : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le réel α :**
  $$\vec{v}\wedge\vec{u}=-\vec{u}\wedge\vec{v}\ ;\ (\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})\ ;\ \vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}.$$

On notera que $\left\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right\|$ est l'aire du parallélogramme formé sur les côtés [AB] et [AC].

5) Expression analytique du produit vectoriel :

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormale directe. Montrer que les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}$ dans cette base sont telles que :

Si $\vec{u}=(x,y,z)$ et $\vec{v}=(x',y',z')$, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=(yz'-zy', zx'-xz', xy'-yx')$.

Exercices :

Démontrer les résultats des paragraphes 4) et 5), puis calculer l'aire du triangle ABC avec A(1,2,-1), B(4,0,1) et C(1,3,-2).

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

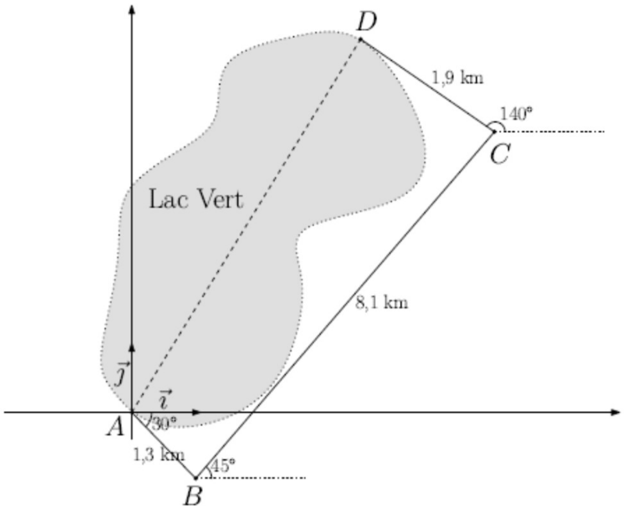
……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

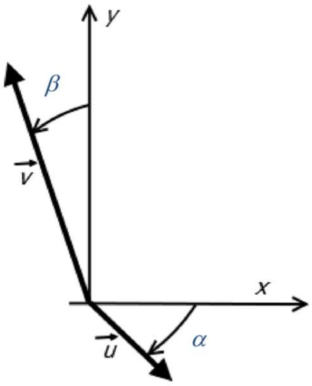
Partie B : Exercices

Exercice 1 Arpentage



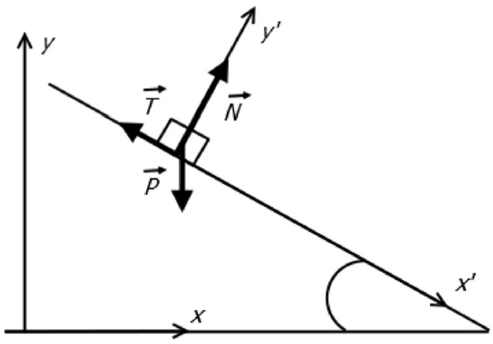
On souhaite mesurer la distance entre deux points du bord d'un lac schématisé ci-contre (le dessin n'est pas à l'échelle). Pour calculer la distance AD, on effectue une série de mesures (sur le bord) indiquées sur le dessin.

Exercice 2 Projection et produit scalaire



On considère une base orthonormée du plan $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. Soient un vecteur $\vec{u}$ de norme u faisant un angle α avec le vecteur $\overrightarrow{u_x}$ et un vecteur $\vec{v}$ de norme v et faisant un angle β avec le vecteur $\overrightarrow{u_y}$. Donner les projections de deux vecteurs précédents dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. Déterminer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ de deux manières différentes.

Exercice 3 Palet sur un plan incliné



On considère un palet sur un plan incliné d'un angle $\propto$ par rapport à l'horizontale. Ce palet subit trois forces : son poids caractérisé par le vecteur $\vec{P}$ de norme P et de la part du plan incliné la réaction normale $\vec{N}$ de norme N et la réaction tangentielle $\vec{T}$ de norme T (frottements du solide). On considère par ailleurs deux bases orthonormées du plan : $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ et $(\overrightarrow{u_{x'}}, \overrightarrow{u_{y'}})$ (voir dessin).

1) Exprimer les trois forces considérées dans les deux bases différentes.
2) Exprimer la résultante de forces $\vec{P}+\vec{N}+\vec{T}$ dans la base $(\overrightarrow{u_{x'}}, \overrightarrow{u_{y'}})$.
3) Déterminer la norme $\vec{P}-\vec{T}$.
4) Soit un vecteur $\vec{v}$ de norme v et faisant un angle β avec le vecteur $\overrightarrow{u_{x'}}$. Exprimer $\vec{P}\cdot\vec{v}$ en fonction de P, v, β et α.

<u>Exercice 4</u> Dans l'espace

1. Dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) on considère les vecteurs $\vec{u}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$ et $\vec{v}=-\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}$. Donner leurs normes, leur produit scalaire, l'angle qu'ils forment entre eux. Calculer la projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.
2. Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}$ (4, 2, —2) et $\vec{v}$ (— 1 , 3, 4). Déterminer, de deux manières différentes, un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. En repère orthonormé, on donne $\vec{u}$(1, 2, -1), $\vec{v}$(0,-l, 1) et $\vec{w}$ (2, l, 1). Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et [$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$], où [$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$] = $\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$ est le produit mixte des 3 vecteurs.
4. On considère un triangle ABC de côtés a, b et c et d'angles $\propto$, β, γ.

   (a) Montrer que $a^2 = a^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (formule d'Al Kashi, ou de Pythagore généralisé).

   (b) Montrer que l'aire du triangle est $\frac{1}{2}bc\ sin\alpha$; en déduire que $\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}=\frac{c}{sin\gamma}$

5. Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, A un point de (D). Soit M un point quelconque.
   Donner une expression, à l'aide d'un produit vectoriel, de la distance de M à (D).
   Application numérique 1 : (D_1) définie par A(l, 0, -1) et $\vec{u}$ (l, -2, l), M_1 (1 -1,3).
   Application numérique 2 : (D_2) intersection des plans 3x+2y -z = 7 et x + 3y+z = 0, M_2(2, 1,-1).

<u>Exercice 5</u> Equation de droites

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, déterminer de deux manières différentes une équation de la droite de repère (A,$\vec{u}$) avec A(-1, 3) et $\vec{u}(2,-1)$
Méthode 1 : par colinéarité de deux vecteurs
Méthode 2 : en utilisant un vecteur orthogonal à $\vec{u}$.

2) Dans l'espace de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, déterminer une équation du plan de repère
(A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) avec A$(1, 0, -1)$, $\vec{u}$ (2, 2,1) et $\vec{v}$ (1, 2,3).
Méthode : on se ramène au cas d'un plan défini par un point et un vecteur normal ; il suffit de déterminer, pour vecteur normal, un vecteur orthogonal aux deux vecteurs donnés.

3) Dans l'espace on considère les points A(1,0,1), B(-1,1,1), C(0,2,-1) et D(2,1,2).
- Calculer la distance entre A et la droite (BC)
- Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (BCD), puis calculer la distance de A au plan (BCD).
- Calculer la distance entre les droites (AB) et (CD).

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...