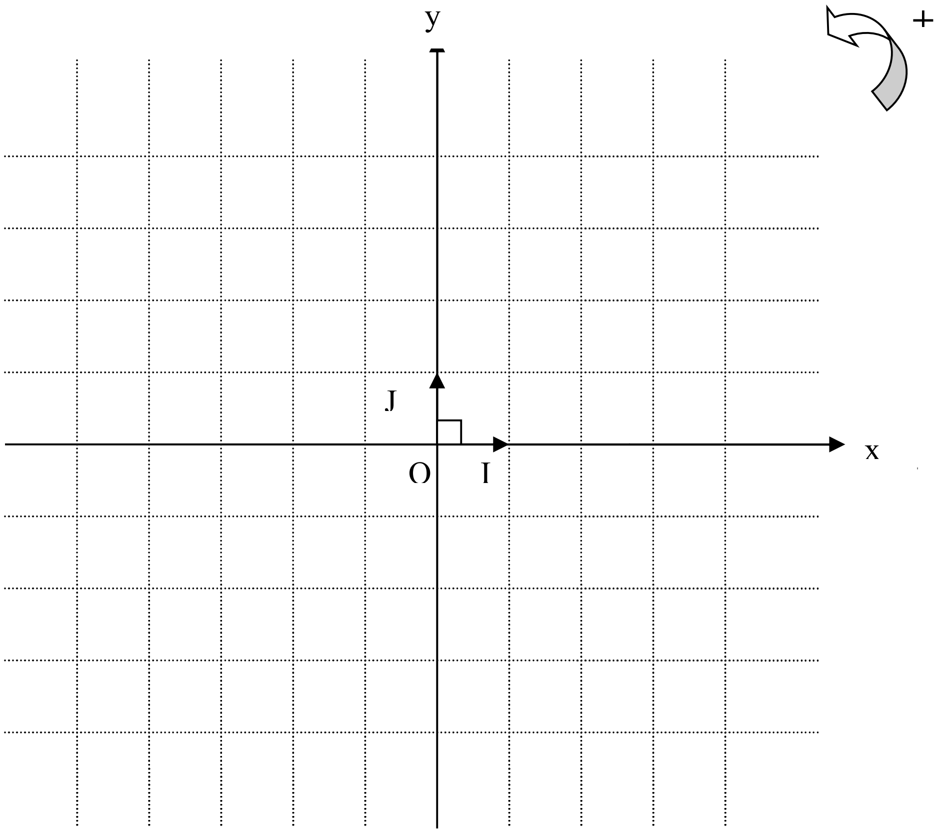
Chapitre 2 : Courbes polaires

I. Notions de base

Rappel Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ direct. Les **coordonnées polaires** d'un point M du plan sont le couple de nombre (r , θ), où r = $OM > 0$ est le rayon polaire, et θ , une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ est l'angle polaire.

Si (x,y) sont les coordonnées cartésiennes de M, on a alors : $\begin{cases} x = r.\cos(\theta) \\ y = r.\sin(\theta) \end{cases}$



Remarque importante

A tout couple (r , θ) on peut donc associer un point M de coordonnées cartésiennes $(r.\cos(\theta), r.\sin(\theta))$. Inversement, soit M, un point du plan et θ_0 l'angle tel que $\theta_0 = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$. On peut alors associer à M un ensemble de couples de coordonnées polaires (r , θ) définis par :

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + 2k\pi \\ r = OM \end{cases} \quad \text{où k est un entier relatif.}$$

L'application $M \longmapsto (r, \theta)$ n'est donc pas bijective. Pour Résumer, on retiendra que deux points confondus n'ont pas nécessairement les mêmes coordonnées polaires.

1) Définitions

Soit f, une fonction numérique d'une variable θ. Si r = f(θ), le point M de coordonnées polaires (r , θ) décrit la courbe (C) d'équations paramétriques $\begin{cases} \mathbf{x(\theta) = f(\theta).\cos(\theta)} \\ \mathbf{y(\theta) = f(\theta).\sin(\theta)} \end{cases}$

L'équation r = f(θ) est appelée équation polaire de (C).

2) Notations et remarques

Soit (C), la courbe d'équation polaire r = f(θ).

- Le point M de (C) correspondant à l'angle θ , est noté M(θ).
- **Si f(θ) ≥0, alors le point M(θ) a pour coordonnées polaires (f(θ), θ).**
  Si f(θ) ≤0, alors le point M(θ) a pour coordonnées polaires (-f(θ), $\theta + \pi$).

3) Exemples

✓ r = R est l'équation polaire d …………………………………………………………..

✓ Soit la droite (D) d'équation cartésienne x + y = 1 . Quelle est son équation polaire ?

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

✓ Soit I, le point de coordonnées polaires I(2 , $\frac{\pi}{3}$). Quelle est l'équation polaire du cercle de centre I et de rayon 3 ?

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

✓ Plus généralement, le cercle de centre I de coordonnées polaires (r_0, θ_0) et de rayon R a pour équation polaire : $r^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = R^2$

En particulier, si le cercle passe par O, l'origine du repère, quelle est alors son équation polaire ?

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

4) Plan d'étude

Pour construire la courbe (C) d'équation polaire r = f(θ), on utilise le même plan d'étude que dans le cas des courbes définies paramétriquement :

1. On précise le domaine de définition D
2. On réduit le domaine d'étude de f en recherchant périodes et symétries. (voir §II)
3. On construit le tableau de variation de f, et on étudie d'éventuels points particuliers. (voir §III)
4. On recherche les éventuelles branches infinies (voir §IV)
5. On construit la courbe et on recherche éventuellement les points multiples et des points d'intersection avec les axes. (voir §V)

II. Réduction du domaine d'étude

1) Principe

Soit (C), la courbe d'équation polaire r = f(θ).
1. Si f est T-périodique, on réduit le domaine d'étude à un intervalle de longueur T, puis on complète la courbe par autant de rotations qu'il faut pour retomber sur l'arc de courbe initial. Parfois la courbe ne se referme pas et on obtient une infinité de rotations c'est le cas lorsque $\frac{\pi}{T}$ n'est pas rationnel).
2. Si f est paire, on réduit le domaine d'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$, et on complète la courbe par une symétrie par rapport à (Ox).
3. Si f est impaire, on réduit le domaine d'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$, et on complète la courbe par une symétrie par rapport à (Oy).
4. Si $f(\pi - \theta) = f(\theta)$, on réduit le domaine d'étude de moitié à un intervalle de centre $\frac{\pi}{2}$, et on complète la courbe par une symétrie par rapport à (Oy).
5. Si $f(\pi - \theta) = -f(\theta)$, on réduit le domaine d'étude de moitié à un intervalle de centre $\frac{\pi}{2}$, et on complète la courbe par une symétrie par rapport à (Ox).

Remarque La liste précédente est non exhaustive, il existe en effet d'autres propriétés permettant de réduire l'intervalle d'étude, comme le montre l'exemple ci-dessous.

2) Exemple 1

Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la courbe d'équation polaire :

$$r = \cos(2\theta)$$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

III. Tableau de variation et points particuliers

1) Définition de points ordinaires, stationnaires et tangente en un point.

Soit (C), la courbe d'équation polaire r = f(θ). La courbe (C) a alors pour équation paramétrique $\begin{cases} x(\theta) = f(\theta).\cos(\theta) \\ y(\theta) = f(\theta).\sin(\theta) \end{cases}$ et on a vu dans le chapitre 1, qu'alors, dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la pente de la tangente à (C) au point M(θ) est : $\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$ (avec $x'(\theta) \neq 0$.)

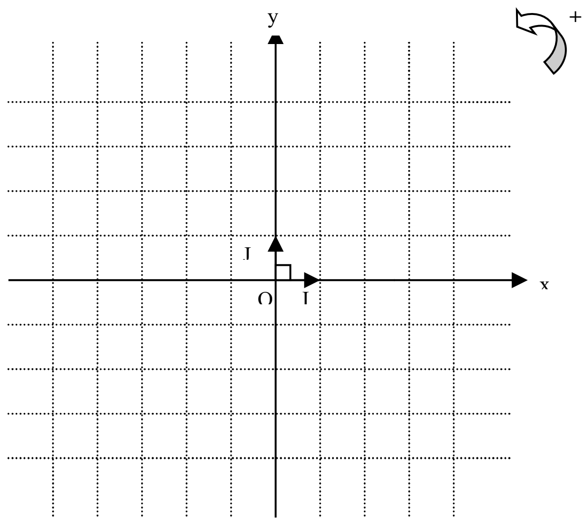
On suppose que f est dérivable en θ, on a alors : $\begin{cases} x'(\theta) = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ y'(\theta) = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{cases}$

Et $\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta) = \begin{pmatrix} x'(\theta) \\ y'(\theta) \end{pmatrix} =$……………………………………………………………………

Si on note $\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta.\vec{\imath} + \sin\theta.\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{v_\theta} = -\sin\theta.\vec{\imath} + \cos\theta.\vec{\jmath}$ ($\overrightarrow{v_\theta} = \overrightarrow{u_{\theta+\frac{\pi}{2}}}$) on obtient alors :

$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta) =$ ………………………………………………………………………………

Dans le repère $(O, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$, la pente de la tangente à (C) au point M(θ) est donc : ……………



Soit (C), la courbe d'équation polaire $r = f(\theta)$, tel que f est dérivable sur D.
- Si $\left(f(\theta), f'(\theta)\right) \neq (0,0)$, on dit que $M(\theta)$ est un point régulier, et la tangente en $M(\theta)$ a pour pente $\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$.

En particulier, si $f'(\theta) = 0$ et $f(\theta) \neq 0$, alors la tangente en $M(\theta)$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v_\theta}$.

En particulier, si $f(\theta) = 0$ et $f'(\theta) \neq 0$, alors la tangente en $M(\theta)$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_\theta}$, et dans ce cas $M(\theta) = O$.

- Si $\left(f(\theta), f'(\theta)\right) = (0,0)$, on dit que $M(\theta)$ est un point stationnaire, et dans ce cas $M(\theta) = O$.

2) <u>Exemple 1</u>

Déterminer le tableau de variation et quelques tangentes de la courbe d'équation polaire :

$$r = \cos(2\theta)$$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

IV. Branches infinies

1) Branche spirale et asymptote

Soit (C), la courbe d'équation polaire r = f(θ).
- Si $\lim_{\theta\to\infty} f(\theta) = 0$, alors la courbe admet une branche spirale qui s'enroule autour de l'origine.
- Si $\lim_{\theta\to\infty} f(\theta) = L$, alors la courbe admet une branche spirale qui s'enroule autour du cercle de centre O et de rayon $|L|$.
- Si $\lim_{\theta\to\infty} f(\theta) = \infty$, alors la courbe admet une branche spirale qui se déroule.
- Si $\lim_{\theta\to\theta_0} f(\theta) = \infty$, alors la courbe admet une direction asymptotique d'angle θ_0 .
Et dans ce dernier cas, si l'asymptote existe, elle a pour équation polaire : $r = \frac{a}{sin(\theta-\theta_0)}$
où $a = \lim_{\theta\to\theta_0} f(\theta).\sin(\theta - \theta_0)$.

2) Suite de l'exemple 1

Déterminer les éventuelles branches infinies de la courbe d'équation polaire :

$$r = \cos(2\theta)$$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

V. Construction de la courbe

1) Procédure

On commence par placer les points particuliers et les asymptotes. On joint les différents éléments déjà tracés en tenant compte du sens de variation et du signe de f.

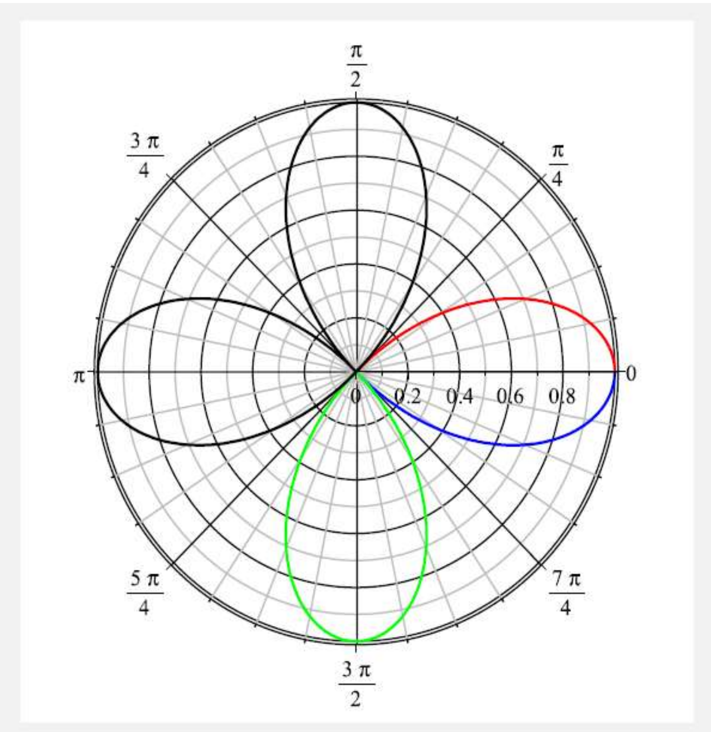
Exemples :

- Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ $r = 1$ et $\frac{r}{r'} = 2$, alors cela correspond au point de coordonnées cartésiennes : ………………………… avec une tangente de pente : ………………
- Si $\theta = \pi$ $r = 1$ et $\frac{r}{r'} = 2$, alors cela correspond au point de coordonnées cartésiennes : ………………………… avec une tangente de pente : ………………
- Si $\theta = \frac{\pi}{4}$ $r = 1$ et $\frac{r}{r'} = 1$, alors cela correspond au point de coordonnées cartésiennes : ………………………… avec une tangente de pente : ………………

2) Recherche d'éventuels points multiples

Soit (C), la courbe d'équation polaire r = f(θ). Un point M(θ) est dit double lorsqu'il est « atteint » au moins deux fois.
M(θ) est double dans les deux cas suivants :
- $f(\theta + 2k\pi) = f(\theta)$ pour tout entier relatif k.
- $f(\theta + (2k+1)\pi) = -f(\theta)$ pour tout entier relatif k.

3) Tracé de la courbe de l'exemple 1 $r = \cos(2\theta)$



VI. <u>Etude complète de l'exemple 2</u>

Etudier la courbe d'équation polaire : $r = \tan(2\theta)$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………