UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 3 : Produit de convolution
Distribution, peigne de Dirac et transformation de Fourier

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

UNIVERSITÉ DE TOULON

Partie 1 : Produit de convolution - Distribution de Dirac

I. Produit de convolution

1) Définition

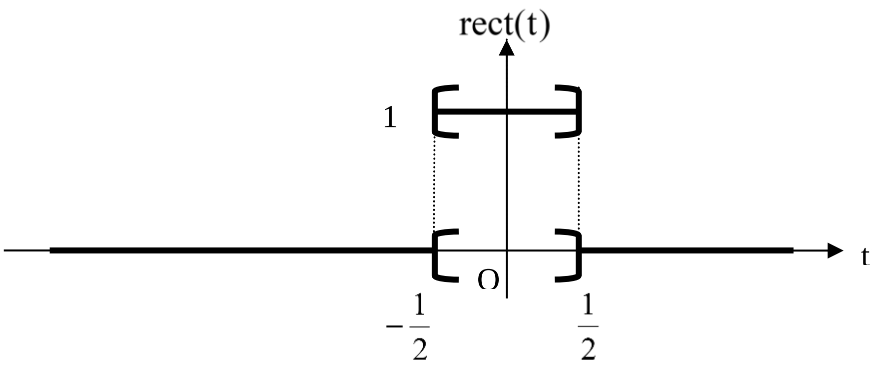
Soit f et g, deux fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle produit de convolution de f par g, la fonction notée : $f * g$, définie par l'intégrale suivante :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du .$$

On peut aussi noter : $(f * g)(t) = f(t) * g(t)$

Exemples

- ✓ Déterminer le produit de convolution suivant : $\mathrm{rect}(t) * e^{-t}$, où $\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$



………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………...

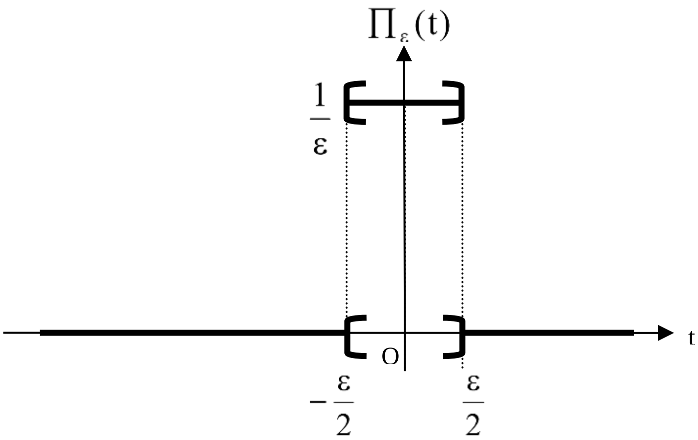
2) Propriétés Les fonctions f, g, g_1, g_2, h sont intégrables sur $\mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{1.\ f * g = g * f}$$
$$\mathbf{2.\ f * (g_1 + \lambda . g_2) = f * g_1 + \lambda . f * g_2}$$
$$\mathbf{3.\ (f_1 + \lambda f_2) * g = f_1 * g + \lambda . f_2 * g}$$
$$\mathbf{4.\ (f * g) * h = f * (g * h)}$$
$$\mathbf{5.\ (f * g)' = f' * g + f * g'}$$

3) Exemples

- ✓ Convolution par une porte de largeur *ε*

$$\prod_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} \text{ si } |t| \le \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 \text{ si } |t| > \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$



On remarque que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_\varepsilon(t)dt =$..

$(f * \prod_\varepsilon)(t) =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

La convolution par une porte de largeur ε représente donc la valeur moyenne de f sur $\left[t - \frac{\varepsilon}{2}, t + \frac{\varepsilon}{2}\right]$.

II. Impulsion ou distribution de Dirac

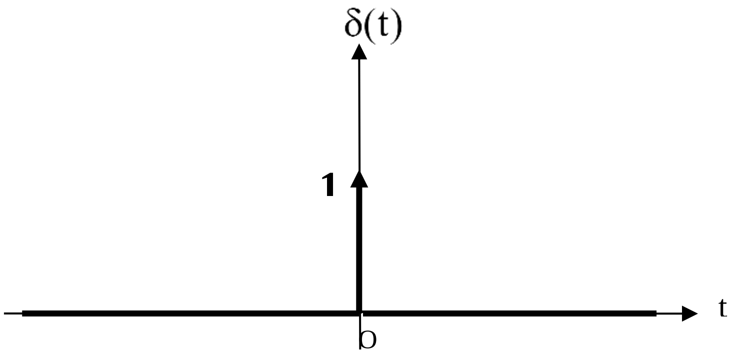
1) Définition

On appelle impulsion de Dirac : $\delta = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \prod_{\varepsilon}(t)$ où $\varepsilon > 0$

On définit parfois δ abusivement par : $\boxed{\boldsymbol{\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \text{, et } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1}}$

δ n'est pas une fonction, c'est une distribution, c'est pourquoi on l'appelle aussi distribution de Dirac.

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{\varepsilon}(x)dx = 1$, par convention, on note donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$, et par convention sa représentation graphique est :



Remarque De nombreux théorèmes (convergence d'intégrales, de séries, inversion de limites en général,…) reposent sur des hypothèses souvent très fortes portant sur les fonctions. Dans la majeure partie des cas, celles-ci ne sont pas vérifiées.

Le recours aux distributions permet d'élargir le champ d'application de ces théorèmes. Une distribution est un concept plus général que celui de fonction. Il permet, entre autre, la formulation et donc le traitement de signaux discrets. Tous les calculs sur les fonctions s'appliquent aussi aux distributions.

2) Produit de convolution par une impulsion de Dirac

On admet que : $(f * \delta)(t) = \left(f * \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \prod_{\varepsilon}\right)(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(f * \prod_{\varepsilon}\right)(t)$

On suppose que f est continue et on note F, une fonction primitive de f, alors :

$\left(f * \prod_{\varepsilon}\right)(t) =$ ………………………………………………………………………..........

........................……………………………………………………………………………

$\left(f * \prod_{\varepsilon}\right)(t) =$ ……………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

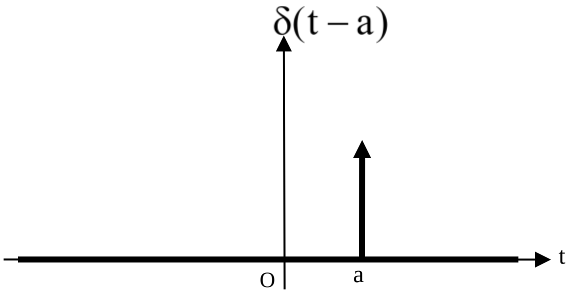
…………………………………………………………………………………………………

Si f est continue alors : $\boxed{(f * \delta)(t) = f(t)}$

On dit que **l'impulsion de Dirac est l'élément neutre pour le produit de convolution.**

4) Convolution par une impulsion de Dirac décalée de a

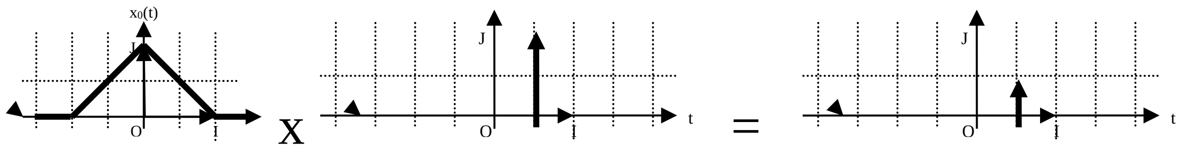
$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq a \\ +\infty \text{ si } t = a \end{cases}$$



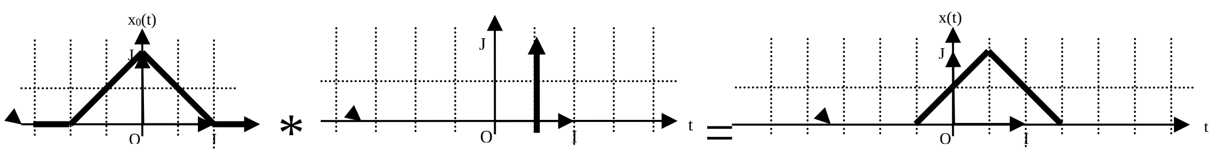
Produit de convolution   Si f est continue alors : $\boxed{f(t) * \delta(t-a) = f(t-a)}$

Attention Ne pas confondre avec le produit classique : $f(t) \times \delta(t\text{-}a) = f(a) \times \delta(t\text{-}a)$

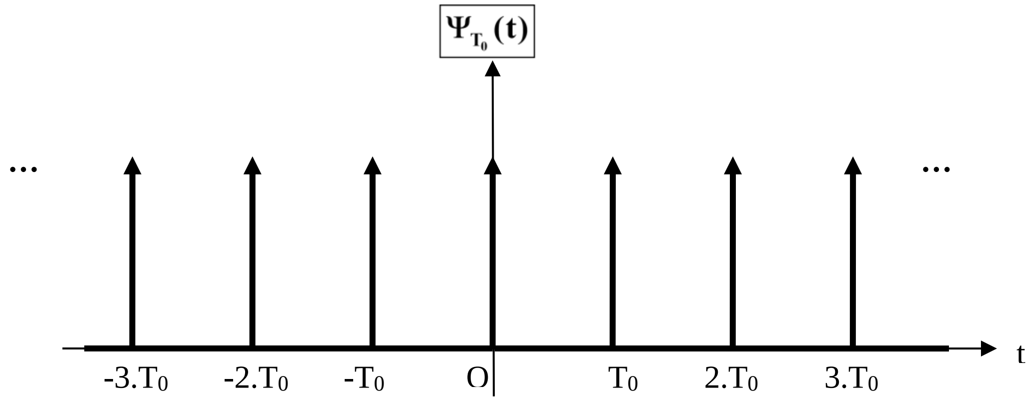
exemple : $\text{tri}(t) \times \delta(t - 1/2) = \text{tri}(1/2).\delta(t - 1/2)$



$$\text{tri}(t) * \delta(t - 1/2) = \text{tri}(t - 1/2)$$



5) Distribution en peigne de Dirac de période T_0 $\quad \boldsymbol{\Psi_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_0)}$



Produit de convolution par un peigne de Dirac

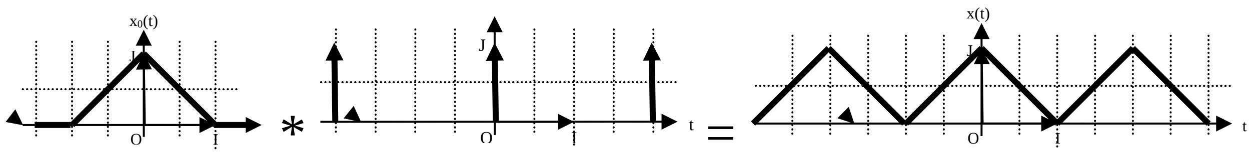
On admet que :

$$(\mathbf{f} * \boldsymbol{\Psi_{T_0}})(t) = \left(f * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_0) \right)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t) * \delta(t - k.T_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - k.T_0)$$

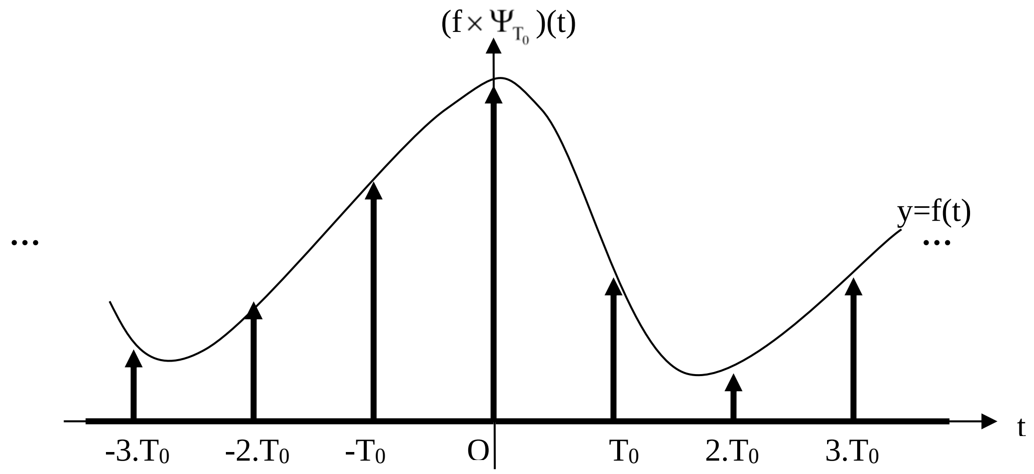
Si f est continue alors : $\boxed{\mathbf{(f * \Psi_{T_0})(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - k.T_0)}}$

On obtient la somme des translatés du signal f, on dit que le signal f est "périodisé".

exemple : $\operatorname{tri}(t) * \Psi_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{tri}(t - 2k)$



Remarque Ne pas confondre avec le produit « classique » d’une fonction par le peigne de Dirac de période T_0, et représenté graphiquement par :

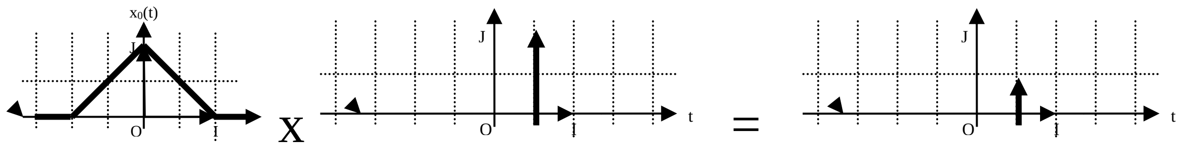


On obtient ici l'échantillonnage du signal f à la période T_0.

Ne pas confondre les quatre opérations …

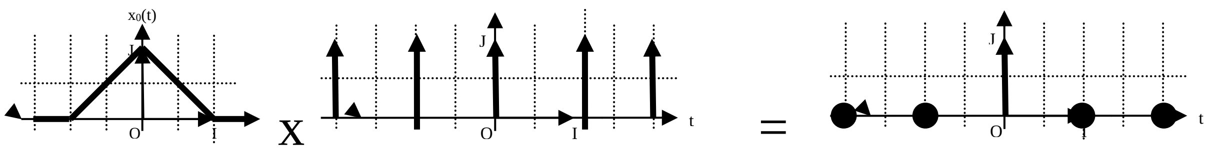
✓ **Le prélèvement** $\mathbf{f(t)\times\delta(t-a)=f(a).\delta(t-a)}$

exemple : $\mathrm{tri}(t)\times\delta(t-1/2)=\mathrm{tri}(1/2).\delta(t-1/2)$



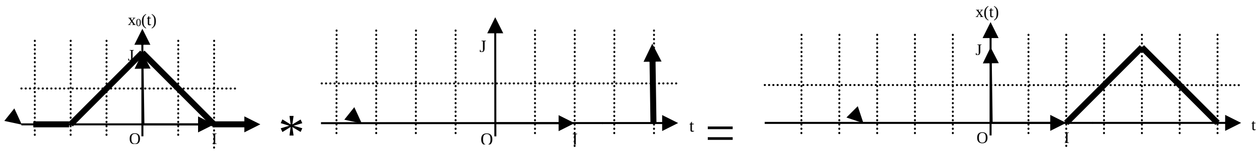
✓ **Le prélèvement multiple** $\mathbf{f(t)\times\Psi_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(kT).\delta(t-kT)}$

exemple : $\mathrm{tri}(t)\times\Psi_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{tri}(k).\delta(t-k)$



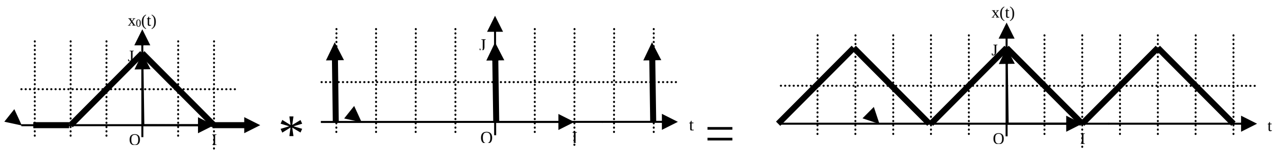
✓ **La translation** $\mathbf{f(t)*\delta(t-a)=f(t-a)}$

exemple : $\mathrm{tri}(t)*\delta(t-2)=\mathrm{tri}(t-2)$



✓ **La translation multiple ou périodisation** $\mathbf{f(t)*\Psi_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(t-kT)}$

exemple : $\mathrm{tri}(t)*\Psi_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{tri}(t-2k)$

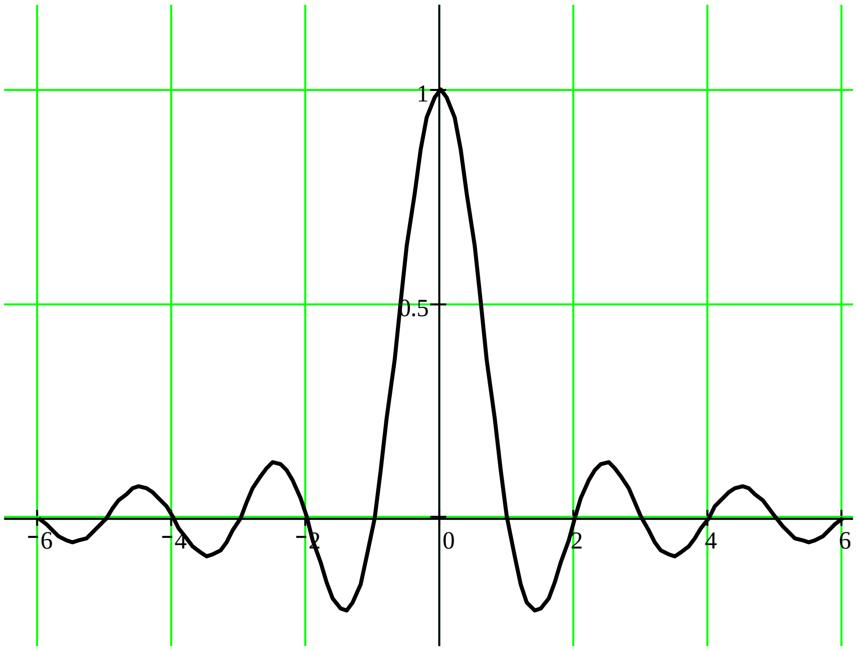


III. Sinus cardinal (sinusoïde amortie)

1) Définition

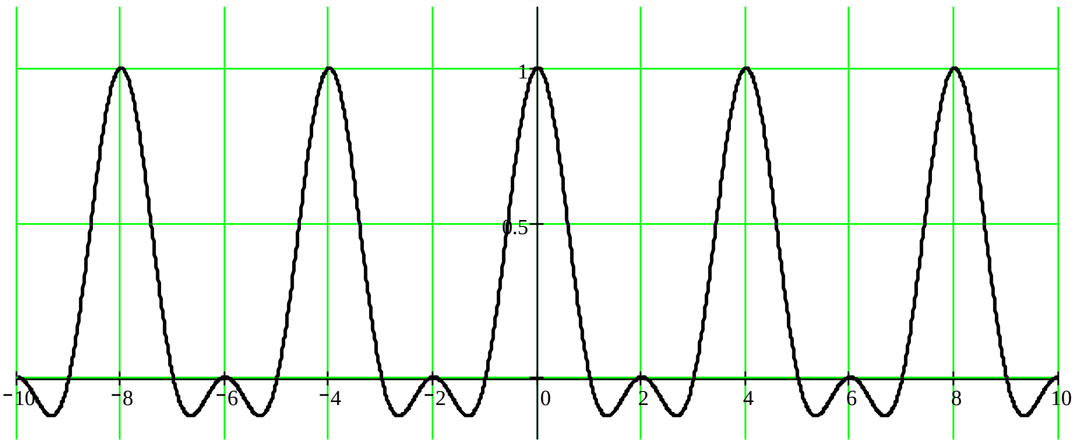
On appelle sinus cardinal, la fonction notée sinc, définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\operatorname{sinc}(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

2) Représentation graphique (voir cours de première année)

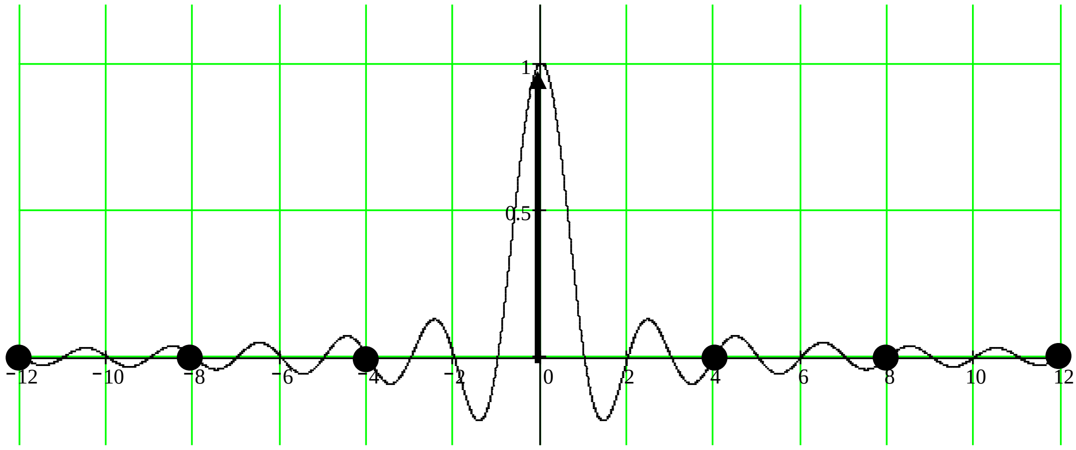


3) Produit de convolution avec le peigne de Dirac

Périodisation du sinus cardinal à la période 4 : $(\operatorname{sinc} * \Psi_4)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin \pi(t-4k)}{\pi(t-4k)}$



Remarque : A ne pas confondre avec $(\sin c \times \Psi_4)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi 4k}{\pi 4k}.\delta(t-4k)$ qui est l'échantillonnage du sinus cardinal à la période 4 :



IV. Exercices

Déterminer h(t)=sin(3t)*rect(t) et $e^{-x}.U(x) * x.U(x)$

Partie 2 : Transformation de Fourier

I. Généralités sur la transformation de Fourier

1) Définitions

Soit x, un signal dépendant du temps :

$$\mathbf{x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & x(t) \end{array}$$

On appelle transformée de Fourier de x(t), la fonction X, dépendant de la fréquence f :

$$\mathbf{X} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & X(f) \end{array}$$

X est définie par la formule suivante : $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2j\pi ft}\, dt$

Pour un f donné, X(f) existe si et seulement si l'intégrale ci-dessus converge.
On note : $X(f)=T_F[x(t)]$ ou encore : $X=T_F[x]$.

2) Vocabulaire

Le graphe représentant la fonction :

$f \longmapsto |X(f)|$ est appelée le spectre de module (ou d'amplitude) du signal x(t),

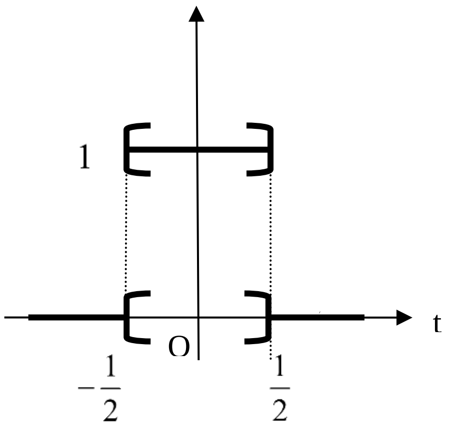
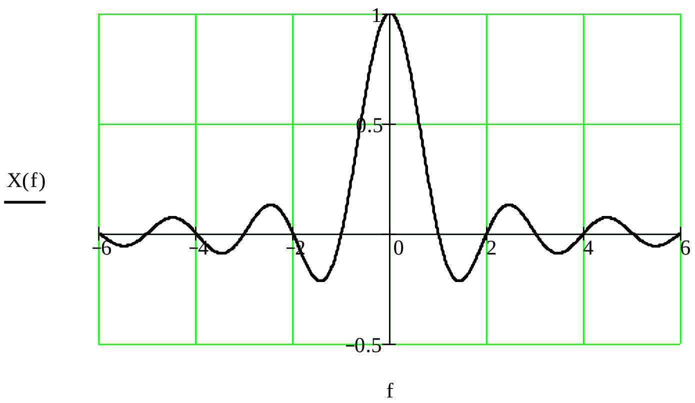
$f \longmapsto \arg(X(f))$ est appelé le spectre de phase du signal x(t),

$f \longmapsto |X(f)|^2$ est appelée le spectre de puissance (ou d'énergie) du signal x(t).

II. Transformée de Fourier de signaux usuels

1) Signal fenêtre temporelle (ou porte) $\mathbf{rect(t)} = \begin{cases} \mathbf{1 \ \text{si} \ |t| \leq \frac{1}{2}} \\ \mathbf{0 \ \text{si} \ |t| > \frac{1}{2}} \end{cases}$

On obtient donc : $\boxed{\mathbf{T_F(rect(t)) = sinc(f)}}$

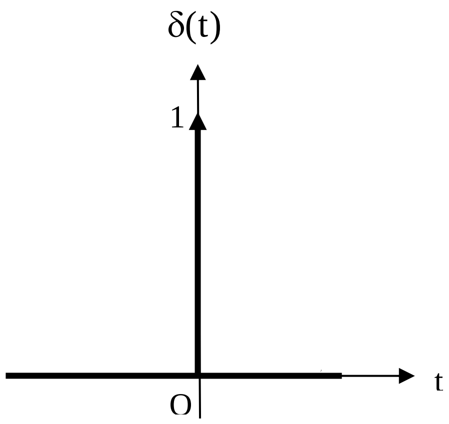
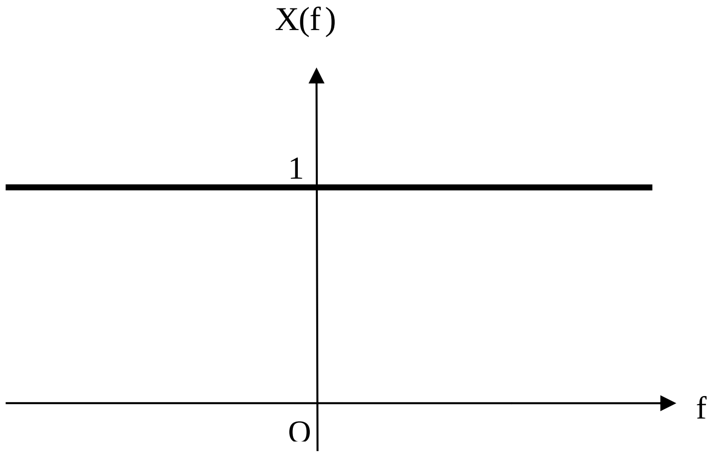
Espace temporel	Espace fréquentiel
$\mathrm{rect}(t)$ 	

2) Impulsion de Dirac $\delta = \lim_{\varepsilon \to 0} \prod_\varepsilon(t)$ où $\varepsilon > 0$ et $\prod_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \ \text{si} \ |t| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 \ \text{si} \ |t| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

Après calcul, on obtient : $T_F\left[\prod_\varepsilon(t)\right] = \sin c(f\varepsilon) = \dfrac{\sin(\pi f \varepsilon)}{\pi f \varepsilon}$.

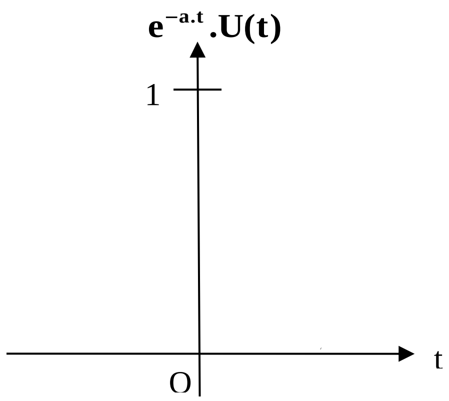
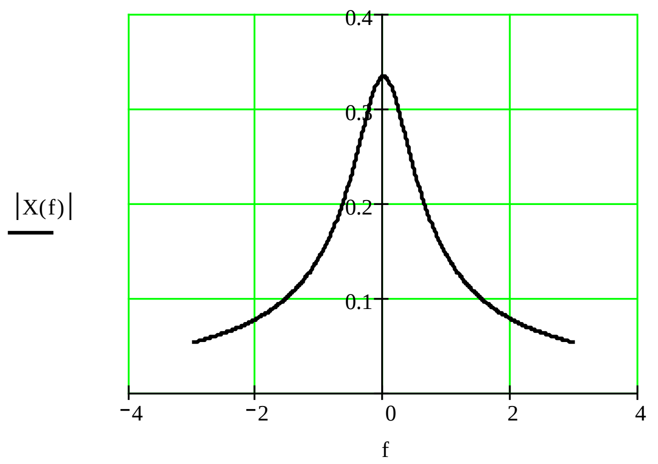
On admet que : $T_F[\delta(t)] = T_F\left[\lim_{\varepsilon \to 0} \prod_\varepsilon(t)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} T_F\left[\prod_\varepsilon(t)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \sin c(f\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\sin(\pi f \varepsilon)}{\pi f \varepsilon} = 1$

$$\boxed{\mathbf{T_F[\delta(t)] = 1}}$$

Espace temporel	Espace fréquentiel
	

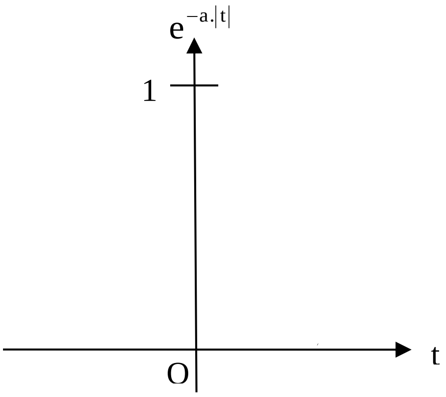
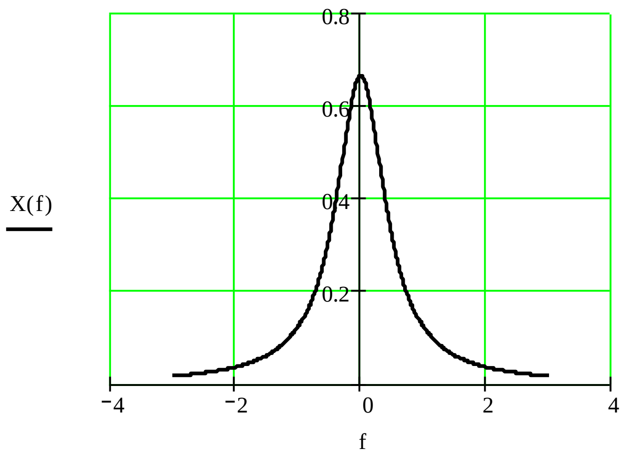
3) Signal exponentiel décroissant $\mathbf{x(t) = e^{-at}.U(t)}$ **où a>0.**

$$\boxed{\mathbf{T_F\left[e^{-a.t}.U(t)\right] = \frac{1}{a + 2j\pi f}}}$$

Espace temporel	Espace fréquentiel (a=3)
	

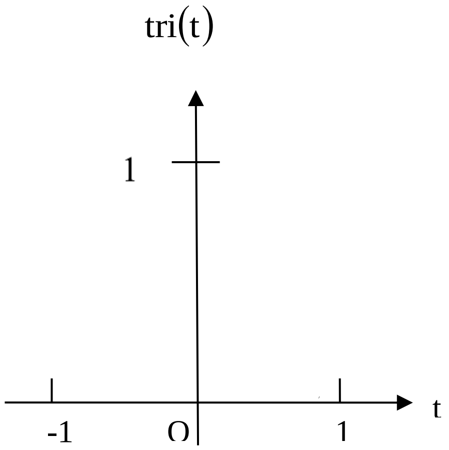
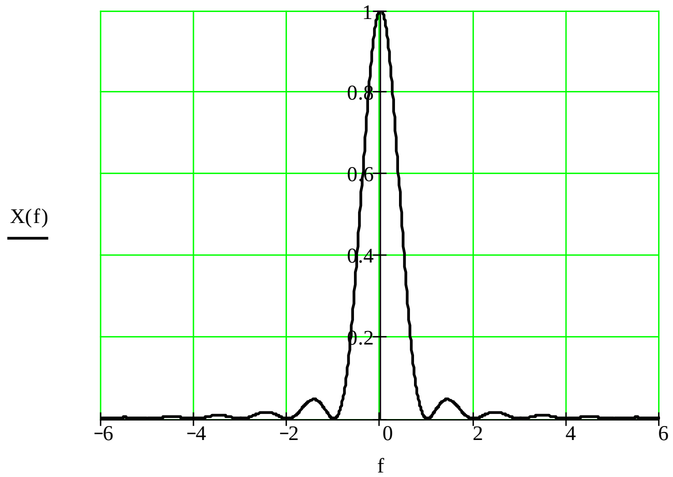
4) Signal exponentiel symétrique $\mathbf{x(t) = e^{-a.|t|}}$ **où a>0.**

$$\boxed{\mathbf{T_F\left[e^{-a.|t|}\right] = \frac{2.a}{a^2 + (2.\pi.f)^2}}}$$

Espace temporel	Espace fréquentiel (a=3)
	

5) Signal fenêtre triangulaire $\mathbf{tri(t)} = \begin{cases} \mathbf{1 - |t| \ \ si \ \ |t| \leq 1} \\ \mathbf{0 \ \ sinon} \end{cases}$

$$\boxed{\mathbf{T_F[tri(t)] = \sin^2 c(f)}}$$

Espace temporel	Espace fréquentiel
	

III. Propriétés de la transformation de Fourier

1) Linéarité

Si $X_1 = T_F\,[x_1]$ et $X_2 = T_F\,[x_2]$, alors $\boxed{\mathbf{T_F\,[\lambda\,x_1 + \mu\,x_2] = \lambda\ T_F\,[x_1] + \mu\ T_F\,[x_2] = \lambda.X_1 + \mu\ .X_2}}$ (λ, μ sont des nombres complexes).

✓ Exemple : $T_F\,[3\mathrm{tri}(t) + \mathrm{rect}(t)] =$……………………………………………………………...................

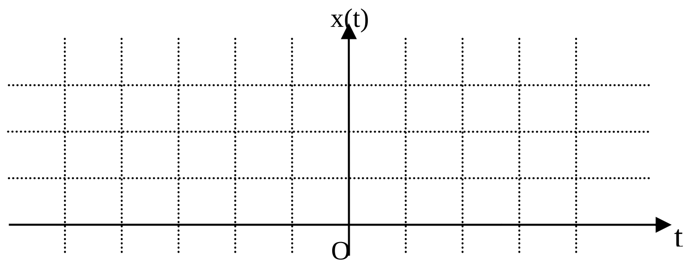
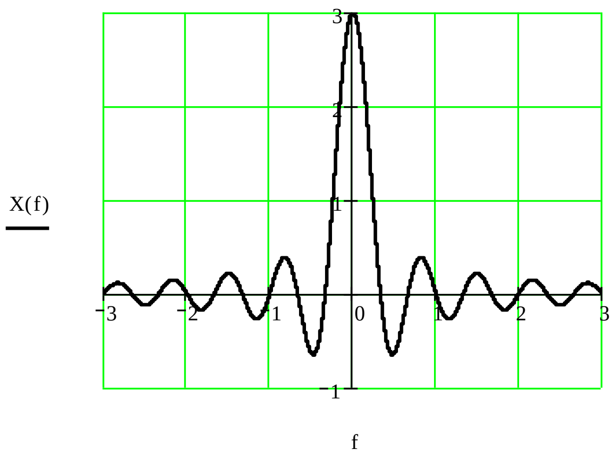
………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………….........

2) Transformée de Fourier de x(a.t) (Homothétie)

$$\boxed{\mathbf{T_F\,[x(a.t)] = \frac{1}{|a|}.X\left(\frac{f}{a}\right)\ \text{où}\ X(f) = T_F\,[x(t)].}}$$

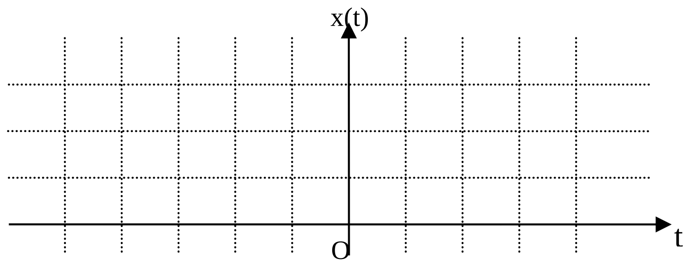
Exemples

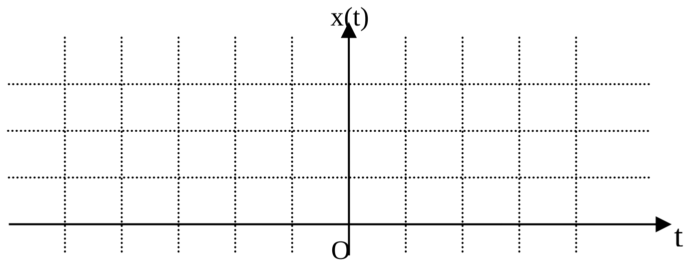
x(t)=rect(t/3) ……………………………………..…........... …………………………………………….. …………………………………………….. ……………………………………………..	Espace temporel 
……………………………………..…........... …………………………………………….. …………………………………………….. …………………………………………….. ……………………………………..…........... …………………………………………….. ……………………………………………..	Espace fréquentiel 

3) Transformée de Fourier d'un signal décalé $x(t-t_0)$

$$\boxed{\mathbf{T_F\,[x(t-t_0)] = e^{-2j\pi.f.t_0}.X(f) \text{ où } X(f)= T_F\,[x(t)]}}$$

Exemples

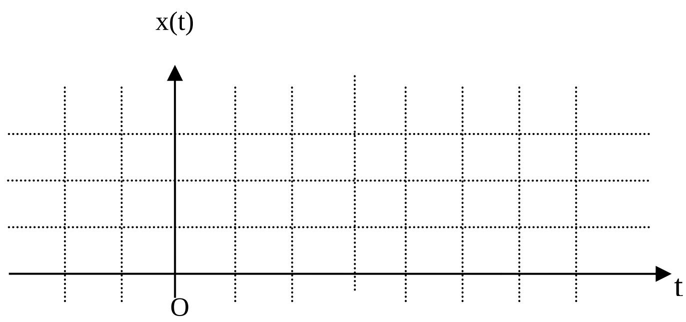
x(t)=rect(t-2) …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… ……………………………………………	

x(t)=tri(t+2) …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… ……………………………………………	

4) Transformée de Fourier d'un changement affine d'échelle $x(at+b)$

$$\boxed{\mathbf{T_F\,[x(at+b)] = e^{2j\pi.f.b/a}.\frac{1}{|a|}.X\left(\frac{f}{a}\right) \text{où } X(f)= T_F\,[x(t)]}}$$

Exemple

x(t)=tri(t/3-1) …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… ……………………………………………	

5) Transformée de Fourier de dérivées successives

$$\boxed{\mathbf{T_F\,[x\,'(t)] = 2j\pi.f.X(f)\quad où\quad X(f) = T_F\,[x(t)]}}$$

Exemple

Retrouver la transformation de Fourier de : $x(t)=\text{tri}(t)$ en calculant d'abord la transformation de Fourier de x'(t).

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

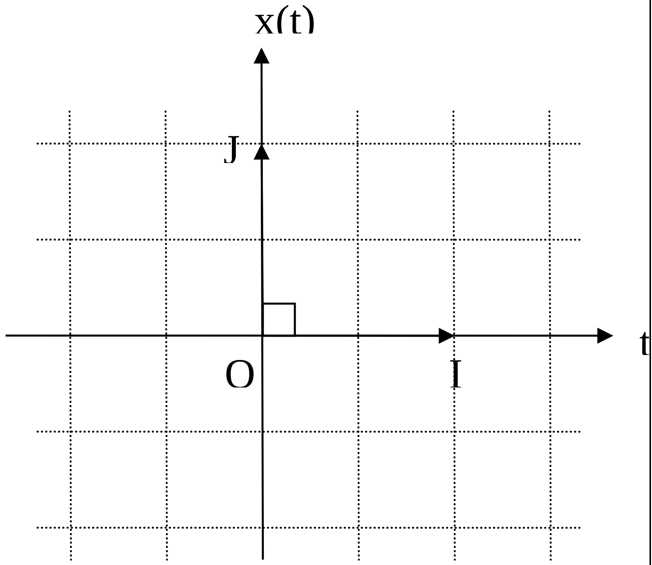
……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………



……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Généralisation

$T_F\,[x\,'(t)] = 2j\pi.f.X(f)$ où $X(f) = T_F\,[x(t)]$

donc $T_F\,[x''(t)]$=……………………………………………………………………

donc $T_F\,[x^{(3)}(t)]$=……………………………………………………………………

donc $T_F\,[x^{(n)}(t)]=$……………………………………………………………………

5) Transformée de Fourier du Produit de convolution

On admet que : $\boxed{\mathbf{T_F\left[x_1 * x_2\right] = X_1 \times X_2 \quad où \quad X_1 = T_F\left[x_1\right] \ et \ X_2 = T_F\left[x_2\right]}}$

Exemples

- ✓ $T_F\left(x * \delta\right) =$…………………………………………………………………………………......
- ✓ $T_F\left(x(t) * \delta(t-a)\right) =$……………………………………………………………………….........
- ✓ $T_F\left(\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)\right) =$…………………………………………………………………..........

IV. Transformation de Fourier inverse

1) Définition / Théorème

On admet que le transformation de Fourier possède une transformation réciproque notée T_F^{-1}. On a alors :

$$\mathbf{X(f) = T_F\left(x(t)\right) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = T_F^{-1}\left(X(f)\right) \ \text{ou encore :} \ X = T_F\left(x\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = T_F^{-1}\left(X\right)}$$

Exemples

- ✓ $T_F^{-1}\left(\sin c(f)\right) =$……………… ; $T_F^{-1}\left(\sin c^2(f)\right) =$.................... ; $T_F^{-1}\left(1\right) =$………………
- ✓ En appliquant la transformation inverse aux exemples du §III.5, on peut alors retrouver les résultats du chapitre 1 :
  $(x * \delta)(t) = x(t)$; $x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$; $\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t) = \mathrm{tri}(t)$

2) Propriétés

La transformation de Fourier inverse possède donc des propriétés similaires à celles de la transformation de Fourier.

- ✓ Si $x_1 = T_F^{-1}\left[X_1\right]$ et $x_2 = T_F^{-1}\left[X_2\right]$, alors :
  $$T_F^{-1}\left[\lambda X_1 + \mu X_2\right] = \lambda T_F^{-1}\left[X_1\right] + \mu T_F^{-1}\left[X_2\right]$$
- ✓ On note $x = T_F^{-1}\left[X\right]$: $T_F^{-1}\left[X(af)\right] = \dfrac{1}{|a|}.x\left(\dfrac{t}{a}\right)$ avec $a \neq 0$.
- ✓ On note $x = T_F^{-1}\left[X\right]$: $T_F^{-1}\left[e^{-2j\pi f t_0}.X(f)\right] = x(t-t_0)$
- ✓ On note $x = T_F^{-1}\left[X\right]$: $T_F^{-1}\left[(2j\pi f)^n.X(f)\right] = x^{(n)}(t)$

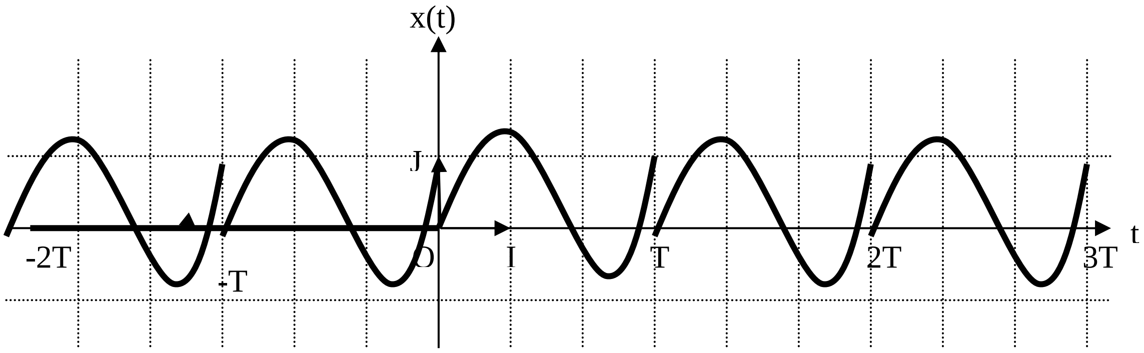
3) Exemples

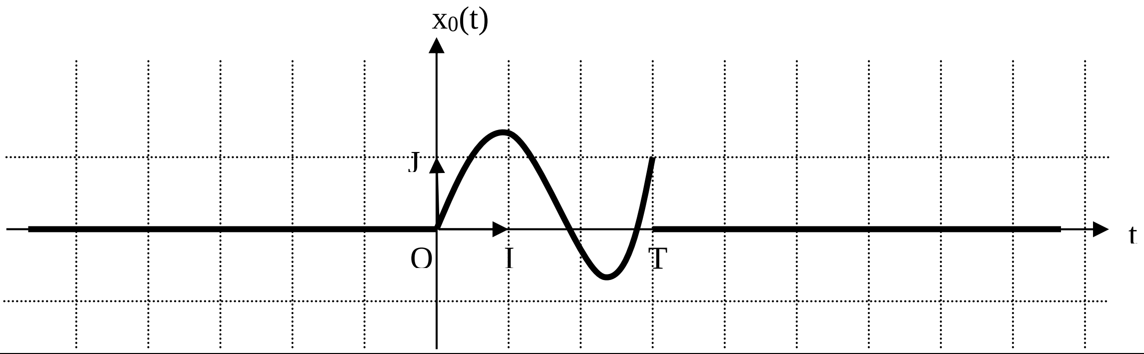
- ✓ $T_F^{-1}\left[e^{-3j\pi f}.\sin c(f)\right] =$ …………………………………………………………………..
- ✓ $T_F^{-1}\left[\sin c(2f)\right] =$ ……………………………………………………………………
- ✓ $T_F^{-1}\left[\dfrac{1}{5+2j\pi f}\right] =$ …………………………………………………………………...
- ✓ $T_F^{-1}\left[\dfrac{e^{-4j\pi f}}{5+2j\pi f}\right] =$ …………………………………………………………………

V. Transformée de Fourier d'un signal périodique / Lien avec la série de Fourier

soit x un signal T-périodique, on considère le motif : $x_0(t) = \begin{cases} x(t) \text{ si } 0 \le t < T \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$**. Soit X_0, la transformée de Fourier de x_0. Alors la transformée de Fourier de x est :**

$$\mathbf{X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n.\delta\left(f - \frac{n}{T}\right), \text{ où } C_n = \frac{1}{T}.X_0\left(\frac{n}{T}\right)}$$





IX. Théorème de Parseval

1) Théorème

Soit $X(f) = T_F[x(t)]$, on admet que : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$

Interprétation : Si x représente une onde en fonction du temps, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ est l'énergie totale de cette onde. La transformation de Fourier conserve donc l'énergie totale.

2) Exemple Appliquons cette formule au signal x(t)=rect(t), nous pourrons alors en déduire la valeur de l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………….............

………………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

TABLEAU DE TRANSFORMEES DE FOURIER

Définitions

$$TF[x(t)]=X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-2j\pi ft}.dt = \begin{cases} 2\int_{0}^{+\infty} x(t).\cos(2\pi ft).dt & \text{si x est paire} \\ -2j\int_{0}^{+\infty} x(t).\sin(2\pi ft).dt & \text{si x est impaire} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{2j\pi ft}.df = \begin{cases} x(t) & \text{si x est continue en t} \\ \dfrac{x(t^-)+x(t^+)}{2} & \text{si x n'est pas continue en t.} \end{cases}$$

Transformée de Fourier de fonctions usuelles

x(t) **ou** **TF^{-1} [X(f)]**	**TF[x(t)]** **ou** **X(f)**
Distribution de Dirac : $\delta(t)$	1
Fonction rectangle : $\mathrm{rect}(\frac{t}{T}) = \begin{cases} 1 \text{ si } \lvert t\rvert \le \frac{T}{2} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$	$T\dfrac{\sin \pi f}{\pi f} = T\,\mathrm{sinc}(Tf) = \dfrac{T\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}$
Fonction exponentielle : $e^{-a\lvert t\rvert}$, où a > 0.	$\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
Fonction exponentielle : $e^{-at}.U(t)$, où a > 0.	$\dfrac{1}{a+2j\pi f}$
Signal triangulaire : $\mathrm{tri}(t)=\begin{cases} 1-\lvert t\rvert \text{ si } \lvert t\rvert \le 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	$\left(\dfrac{\sin \pi f}{\pi f}\right)^2 = \mathrm{sinc}^2(f)$

Propriétés de la transformation de Fourier

x(t) **ou** **TF^{-1} [X(f)]**	**TF[x(t)]** **ou** **X(f)**
$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(f)+bX_2(f)$
$x(t-t_0)$ « décalage temporel »	$e^{-2j\pi f t_0} X(f)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}.X(\frac{f}{a})$
$x(at+b)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}.e^{2j\pi\frac{b}{a}f} X(\frac{f}{a})$
$x'(t)$ « dérivation temporelle »	$2j\pi f.X(f)$
$x^{(n)}(t)$	$(2i\pi f)^n.X(f)$
$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(u)x_2(t-u)du$	$X_1(f).X_2(f)$
$e^{2j\pi t f_0}.x(t)$	$X(f-f_0)$ « décalage fréquentiel »
$-2j\pi t.x(t)$	$X'(f)$ « dérivation fréquentielle »
$(-2j\pi t)^n g(t)$	$X^{(n)}(f)$
$x_1(t).x_2(t)$	$(X_1 * X_2)(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(u)X_2(f-u)du$

On obtiendra des <u>propriétés supplémentaires</u> en échangeant dans les formules précédentes : TF en TF^{-1} et $\begin{cases} \textbf{x en X} \\ \textbf{t en f} \\ \textbf{j en - j} \end{cases}$

Formule de Parseval $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df$

Exercices de la partie 2

Exercice 1 : Soit x, la fonction définie par : $x(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } -3 < t < -2 \\ t - 6 \text{ si } 6 < t < 7 \\ -t + 8 \text{ si } 7 < t < 8 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

Tracer la représentation graphique de x. Exprimer x à l'aide des fonction rectangle et triangle, et en déduire la transformée de Fourier de x.

Exercice 2 : Dans un circuit RC en série, on a l'équation différentielle suivante : $\tau \dfrac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$ où e(t) et s(t) sont les signaux respectivement d'entrée et de sortie et $\tau = RC$.

1) Appliquer la transformation de Fourier à cette équation et en déduire la fonction de transfert du circuit : $H(f) = \dfrac{S(f)}{E(f)}$ où E et S sont les transformées de Fourier respectives de e et s.
2) On note h, la transformée inverse de H, exprimer s en fonction de e et h. Que se passe-t-il si e est une impulsion de Dirac ? On dit alors que s est la réponse impulsionnelle.
3) Calculer h.
4) Calculer s lorsque e est une porte : $e(t) = \begin{cases} E \text{ si } 0 \le t \le T \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ où T>0 et E>0.

Exercice 5 : On considère la fonction x, définie par : x(t) =1 si $|t| \le 1$; x(t)= $2 - |t|$ si $1 \le |t| \le 2$; x(t)=0 sinon.

1) Représenter la fonction x(t)
2) Calculer sa transformée de Fourier par le calcul intégral
3) Calculer sa transformée en écrivant x(t) comme somme de fonctions triangle
4) Calculer sa transformée de Fourier en utilisant la dérivée de x(t).

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………