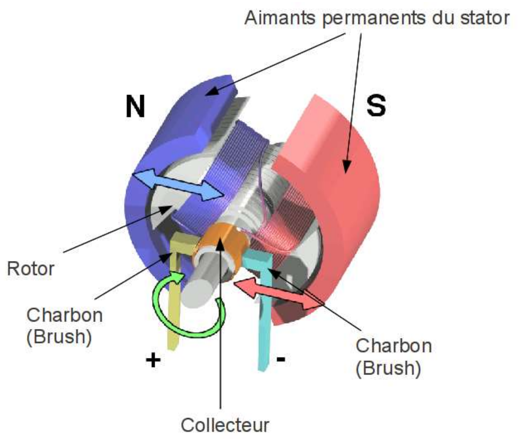
UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

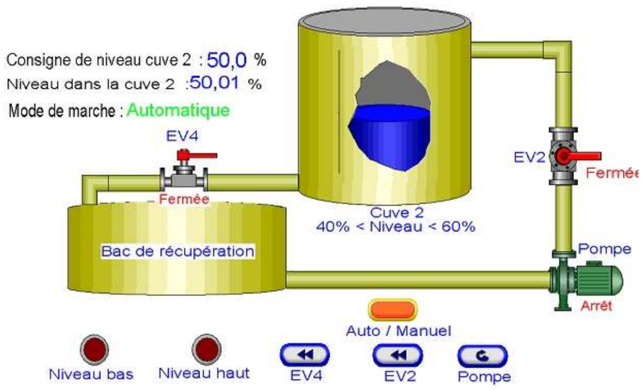
DEPARTEMENT GEII

Cours / TD / TP OUTILS LOGICIELS

La transformation de Laplace et ses applications



Moteur à courant continu

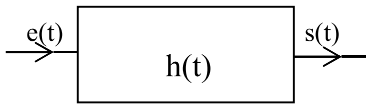


Régulation automatique

Enseignante : Sylvia Le Beux

Introduction

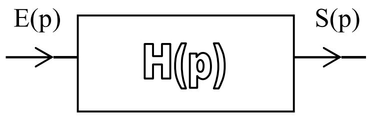
Soit S un système physique (circuit RC, RLC…). Dans un tel système une excitation extérieure ou un signal d'entrée e(t) (tension) engendre une réponse ou un signal de sortie s(t). s(t) dépendra de e(t) et de h(t), fonction mathématique modélisant les caractéristiques temporelles du circuit physique (voir ci-après).



On dit que le **système est linéaire** lorsque e(t) et s(t) sont liés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants dans l'espace temporel (variable = t).

La **transformation de La place** est un outil mathématique facilitant l'étude du signal de sortie : en effet, elle transforme toute équation différentielle en équation algébrique (avec des additions et des multiplications, donc bien plus simple à résoudre.)

Lorsque les **conditions initiales sont nulles**, le système est alors caractérisé par le schéma fonctionnel ci-dessous où : S(p) = H(p).E(p) où H est appelée la <u>fonction de transfert</u> du système. (E(p) et S(p) sont les transformées de Laplace respectives de e(t) et s(t), et H(p) la transformée de Laplace de h(t)).



Partie I : Quelques signaux indispensables

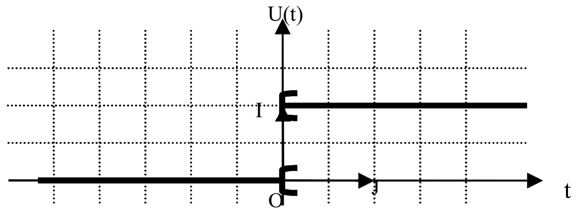
I. Signaux causaux

1) Définition

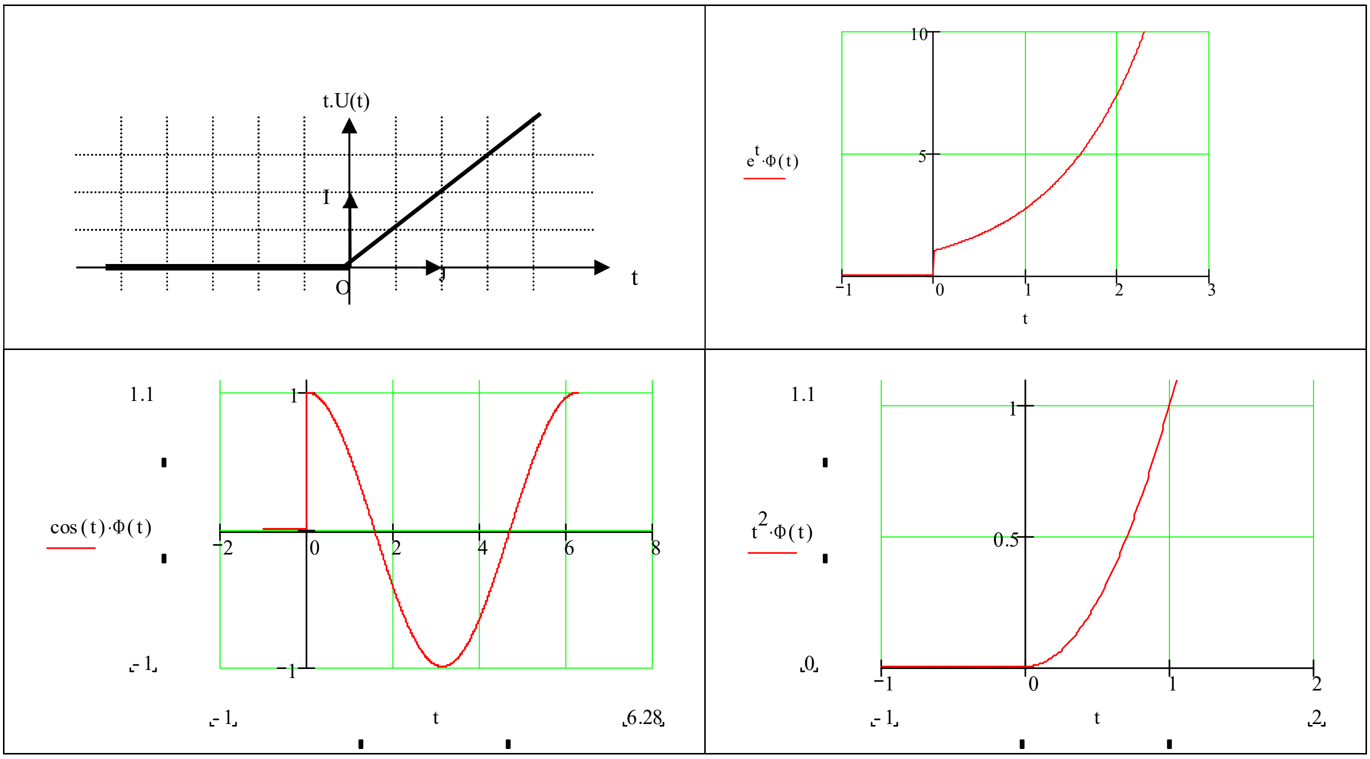
On dit qu'un signal défini sur $\mathbb{R}$ est causal, lorsqu'il est nul sur] - ∞ ; 0 [.

2) Exemples

- ✓ Le signal « échelon-unité » (ou signal de Heaviside), notée U (ou Φ) est causal et défini par : $U(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$.



- ✓ Les signaux : t.U(t) (appelé aussi signal rampe) , e^t.U(t) , Cos(t).U(t) , t^2.U(t) sont donc aussi des signaux causaux.



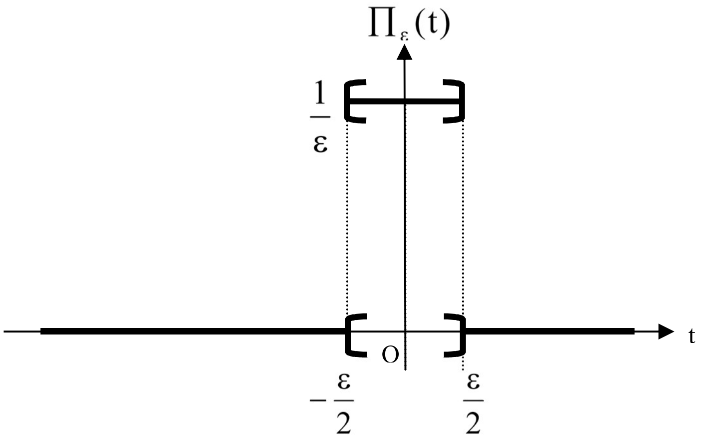
II. Impulsion de Dirac ou distribution de Dirac

Définitions

Soit la fonction porte de largeur ε :

$$\Pi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \text{ si } |t| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 \text{ si } |t| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\varepsilon(t).dt = 1$$

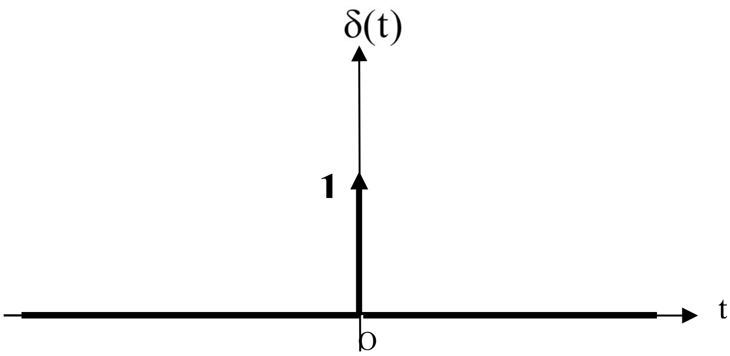


On appelle impulsion de Dirac : $\delta = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Pi_\varepsilon(t)$ où $\varepsilon > 0$

On définit parfois δ abusivement par : $\boxed{\boldsymbol{\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases}, \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1}}$

δ n'est pas une fonction, c'est une distribution, c'est pourquoi on l'appelle aussi distribution de Dirac.

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\varepsilon(x)dx = 1$, par convention, on note donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$, et par convention sa représentation graphique est :



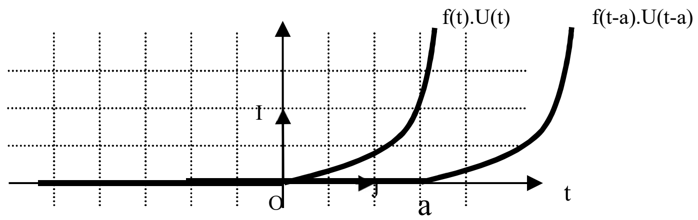
Remarque De nombreux théorèmes (convergence d'intégrales, de séries, inversion de limites en général,…) reposent sur des hypothèses souvent très fortes portant sur les fonctions. Dans la majeure partie des cas, celles-ci ne sont pas vérifiées.
Le recours aux distributions permet d'élargir le champ d'application de ces théorèmes.

Une distribution est un concept plus général que celui de fonction. Il permet, entre autre, la formulation et donc le traitement de signaux discrets. Tous les calculs sur les fonctions s'appliquent aussi aux distributions.

III. Signaux retardés

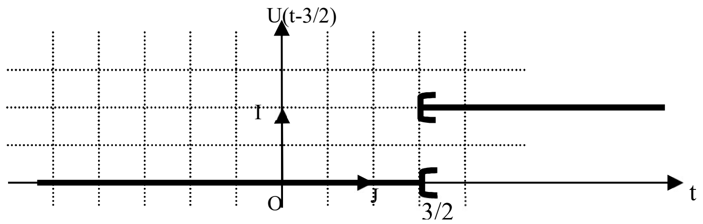
1) Définition

Soit a un nombre réel positif. **Le signal $\mathbf{f(t-a).U(t-a)}$ est le signal $\mathbf{f(t).U(t)}$ retardé de a.**

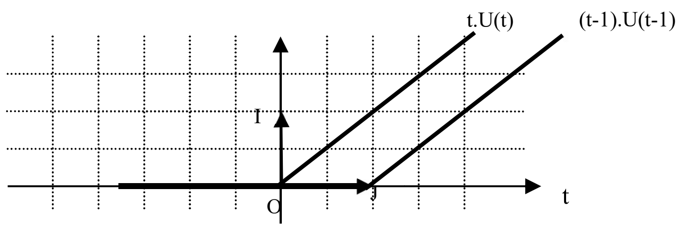


2) Exemples

- ✓ U(t-3/2) est le signal échelon unité retardé de 3/2.



- ✓ (x-1).U(x-1) est le signal rampe retardé de 1 :



IV. Travaux Pratiques avec un logiciel de calcul formel

1) Représenter graphiquement sur l'intervalle [-5 ;5] avec un pas de 0.01, le signal échelon-unité, ou fonction de Heaviside. Dans le même repère, tracer les signaux de Heaviside retardé de 3.

2) Tracer dans un même repère le signal f défini par : $f(t) = e^{3t}.U(t)$, et g le signal f retardé de 2.

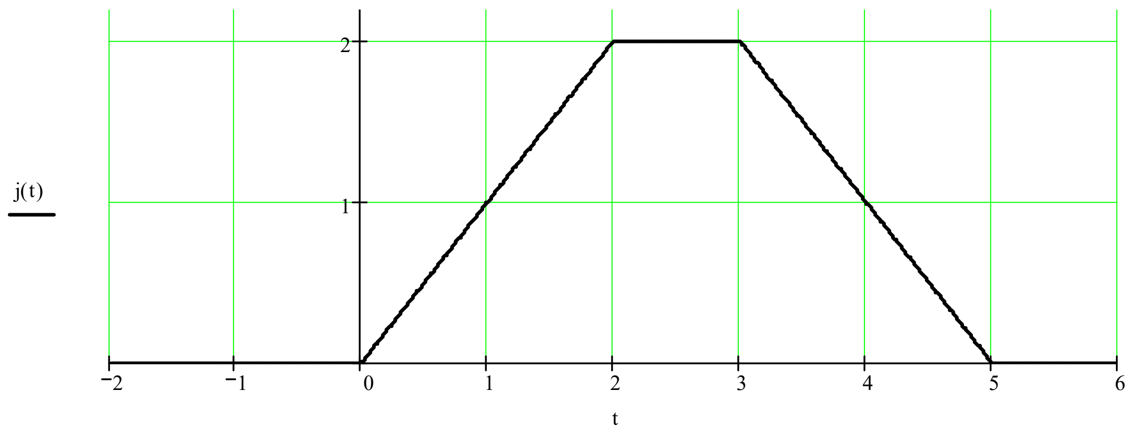
3) Soit f, g, h, k, les fonctions définies par : $\mathrm{f}(\theta) = \sin(\theta)\,.\,\mathrm{U}(\theta)$,
$\mathrm{g}(\theta) = \sin(\theta)\,.\,\mathrm{U}(\theta - \frac{\pi}{2})$, $\mathrm{h}(\theta) = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right).\,\mathrm{U}(\theta - \frac{\pi}{2})$ et $\mathrm{k}(\theta) = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right).\,\mathrm{U}(\theta)$.
Tracer les courbes représentant ces quatre fonctions dans un même repère sur l'intervalle $[-\pi\,, 3\pi]$. Déterminer graphiquement la fonction retardée de f. Quelle est la valeur du retard ?

4) Représenter graphiquement le signal défini par morceaux par :

$$i(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ t & \text{if } 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{if } t \ge 1 \end{cases}$$

Déterminer l'expression de i(t) à l'aide de fonctions de Heaviside, la noter k(t) puis, vérifier ce résultat en traçant k(t) dans le même repère.

5) Faire de même avec le signal j défini graphiquement par :



……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………..

Partie II : Transformation de Laplace

I. Transformation de Laplace directe

1) Définition

Soit f, un signal causal. On appelle transformée de Laplace de f la fonction F définie par l'intégrale : $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx$, $p \in \mathbb{C}$.

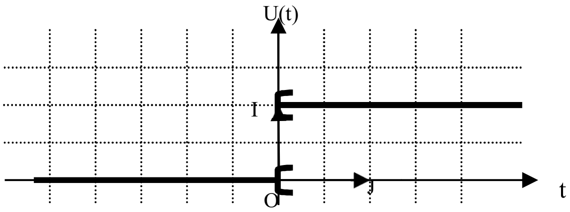
L'ensemble de définition de F est l'ensemble des nombres complexe p tels que l'intégrale ci-dessus converge.

$\mathcal{L}$ est l'application qui à f associe F, on l'appelle transformation de Laplace.

On note F(p)=$\mathcal{L}$[f(x)] ou encore : F= $\mathcal{L}$[f].

2) Transformées de l'échelon-unité

- ✓ Définition : $U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$. (appelée aussi fonction de Heaviside et noté **Φ)**



- ✓ Transformée de Laplace :

$\mathcal{L}$[U(x)] = F(p) = $\int_0^{\infty} e^{-px}.U(x).dx = \lim_{X\to\infty} \int_0^{X} e^{-px}.U(x).dx = \lim_{X\to\infty} \int_0^{X} e^{-px}.dx$

1er cas : p$>$ 0 : $F(p) = \lim_{X\to+\infty} \left[\frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^X = \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{e^{-pX}}{-p} - \frac{1}{-p}\right) = \frac{1}{p}$

2ème cas : p$<$ 0 : $\lim_{X\to+\infty} \left[\frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^X = \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{e^{-pX}}{-p} - \frac{1}{-p}\right) = +\infty$, alors F(p) n'existe pas.

3ème cas : p$=$ 0 : $\int_0^{\infty} U(x).dx = \lim_{X\to\infty} \int_0^{X} U(x).dx = \lim_{X\to\infty} \int_0^{X} 1.dx = \lim_{X\to+\infty} [x]_0^X = \lim_{X\to+\infty} X = +\infty$, donc F(p) n'existe pas.

On admet que : $\mathcal{L}$[U(x)]= $\frac{1}{p}$ Si et seulement si Re(p)>0.

On note également : $\mathcal{L}$[1]= $\frac{1}{p}$

TABLEAU DE TRANSFORMEES DE LAPLACE

Définition $\mathcal{L}[f(t).U(t)]=F(p)=\int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}.dt$

Signaux usuels

f, fonction causale	$\mathcal{L}[f(t)]$ ou F(p)
$\delta(t)$	1
U(t) ou 1	$\frac{1}{p}$
$t^n.U(t)$ ou t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos(\omega t).U(t)$ ou $\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t).U(t)$ ou $\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at}.U(t)$ ou e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$e^{-at}.t^n.U(t)$ ou $e^{-at}.t^n$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\cos(\omega t).e^{-at}.U(t)$ ou $\cos(\omega t).e^{-at}$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t).e^{-at}.U(t)$ ou $\sin(\omega t).e^{-at}$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

Propriétés

g, fonction causale	$\mathcal{L}[g(t)]$ ou G(p)
f(t).U(t)	F(p)
Signal retardé de a : f(t-a).U(t-a) où a>0	$e^{-ap}.F(p)$
Signal dérivé : f ’(t).U(t)	$pF(p)-f(o^+)$
Signal dérivé deux fois : f ’’(t).U(t)	$p^2F(p)-pf(0^+)-f'(0^+)$
$f^{(n)}(t).U(t)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(0^+)-p^{n-2}f'(0^+)-...-pf^{(n-2)}(0^+)-f^{(n-1)}(0^+)$.
$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(p)}{p}$
t.f(t).U(t)	-F’(p)

II. Exercices et problème

A. Déterminer la transformée de Laplace des signaux suivants, puis vérifier vos résultats à l'aide d'un logiciel de calcul formel (Mathcad, Maxima)

1) $f(t) = t^3.U(t)$; $F(p) =$ …………………………………………………………………

2) $f(t) = t^7$; $F(p) =$ ……………………………………………………………………

3) $f(t) = 4t^5 - 3t^2 + 2$; $F(p) =$ ……………………………………………………………..

4) $f(t) = \cos(3t).U(t)$; $F(p) =$ ……………………………………………………………..

5) $f(t) = e^{-2t}.\cos(3t).U(t)$; $F(p) =$ ………………………………………………………...

6) $f(t) = t^2.e^{3t}.U(t)$; $F(p) =$ …………………………………………………………………

7) $f(x) = (x+1)^2.U(x)$; $F(p) =$ ……………………………………………………………………

8) $f(t) = t.\sin(t)$; $F(p) =$ ……………………………………………………………………..

9) $f(t) = \sin(t - \frac{\pi}{4}).U(t - \frac{\pi}{4})$; $F(p) =$ …………………………………………………...

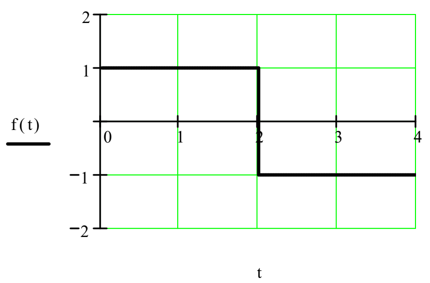
10) $f(t) = \sin(t - \frac{\pi}{4}).U(t)$; $F(p) =$ ……………………………………………………………..

11) $f(t) = \sin t.U(t - \frac{\pi}{4})$; $F(p) =$ …………………………………………………………………

12) $f(x) = (x^2-1).U(x-2)=$; $F(p) =$ ………………………………………………………………

B. Problème :

Soit f, la fonction nulle partout sauf sur [0,4] dont la représentation graphique est :



1) Sur feuille, exprimer f à l'aide de somme de signaux causaux, puis calculer sa transformée de Laplace de f. Vérifier ces résultats (graphiquement entre autre) à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

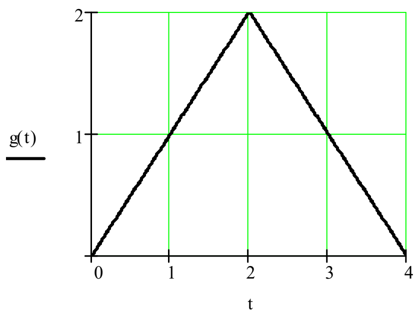
……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

2) Soit g, la fonction nulle partout sauf sur [0,4] dont la représentation graphique est :



Montrer que g'(t) = f(t), puis en déduire la transformée de Laplace de g. (vérifier ces résultats à l'aide du logiciel).

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

III. Transformation de Laplace inverse

1) Définition

Soit F(p), la transformée de Laplace d'une fonction f(x) : $F(p)=\mathcal{L}[f(x)]$. On appelle original de F, la fonction f. On note : $f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ ou encore : $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$.
La transformation $\mathcal{L}^{-1}$ est appelée transformation de Laplace réciproque.

Exemples Compléter, puis vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

- ✓ $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p}]=$ ……………………… ; $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p^3}]=$ ………………………
- ✓ $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p+3}]=$ ………………….. ; $\mathcal{L}^{-1}[\frac{p}{p^2+4}]=$ ……………………
- ✓ $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p^2+4}]=$ ……………………. ; $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(p+3)^2}]=$ …………………

2) Propriété de linéarité de la transformation de Laplace inverse

Linéarité $\mathcal{L}^{-1}[\lambda F+\mu G]= \lambda \mathcal{L}^{-1}[F]+ \mu \mathcal{L}^{-1}[G]$ **(λ ,μ sont des complexes).**

Exemples Calculer l'original des fonctions suivantes, puis vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

✓ $F(p) = \dfrac{6}{p^2-9}$ …………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………...

✓ $G(p) = \dfrac{3p^2-p+1}{(p^2+4)(p+1)^2} = \dfrac{1}{(p+1)^2} - \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{p+1}{p^2+4}$ …………………………………......

………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

✓ $F(p) = \dfrac{p}{p^2 + p + 1}$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

✓ $G(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

✓ $H(p) = \dfrac{e^{-3p}}{(p-1)(p^2+1)}$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

IV. Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

1) Théorème de la valeur initiale **:** $\boxed{\lim_{p \to \infty} p.F(p) = f(0^+)}$

2) Théorème de la valeur finale : $\boxed{\lim_{p \to 0} p.F(p) = \lim_{x \to +\infty} f(x)}$

3) Exercice

Déterminer $\lim_{t\to +\infty} y(t)$, si la transformée de Laplace de $t \mapsto y(t).U(t)$ est :

$Y(p) = \frac{e^{-ap}}{p^2}\left(1 - \frac{e^{-ap}}{1+2ap}\right)$ où a>0.

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

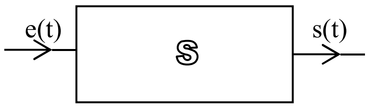
…………………………………………………………………………………………………..

Partie III : Applications de la Transformation de Laplace

I. Application à l'étude des systèmes

1) Fonction de transfert d'un circuit

Soit S un circuit (RC, RLC…). Dans un tel circuit, un signal d'entrée e(t) (tension) engendre un signal de sortie s(t), appelé aussi réponse du circuit au signal e(t)).



On dit que le circuit S est linéaire lorsque e(t) et s(t) sont liés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Le circuit est dit d'ordre n lorsque l'équation différentielle est d'ordre n :

$$a_n s^{(n)}(t) + a_{n-1} s^{(n-1)}(t) + ... + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_n e^{(n)}(t) + b_{n-1} e^{(n-1)}(t) + ... + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

Fonction de transfert du circuit **On note E(p) et S(p) les transformées de La place respectives de e(t) et s(t), puis on applique la transformation de Laplace à l'équation différentielle :**

$$\mathbf{a_n s^{(n)}(t) + a_{n\ 1} s^{(n\ 1)}(t) + ... + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_n e^{(n)}(t) + b_{n\ 1} e^{(n\ 1)}(t) + ... + b_1 e'(t) + b_0 e(t)}$$

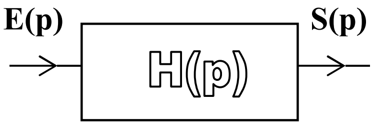
Avec conditions initiales nulles :

$$\mathbf{s^{(n)}(0) = s^{(n-1)}(0) = ... = s'(0) = s(t) = e^{(n)}(0) = e^{(n-1)}(0) = ... = e'(0) = e(0)}$$

On obtient alors une équation algébrique liant E(p) et S(p).
On appelle fonction de transfert du circuit et on note H, la fonction définie par :

$$\mathbf{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}}.$$

Le circuit est alors caractérisé par le schéma fonctionnel ci-dessous :



2) Exemple de circuit du premier ordre Etude du filtre passe-haut.

Soit un circuit dans lequel la sortie s(t) et l'entrée e(t) vérifient l'équation différentielle :
s'(t)+3.s(t) = 2.e'(t) + e(t) ; s(0) = e(0) = 0. Soit S(p) =$\mathcal{L}$[s(t)] et E(p) = $\mathcal{L}$[e(t)].

- ✓ Calculer la fonction de transfert H(p) de ce circuit : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$
- ✓ On appelle **réponse impulsionnelle** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est une impulsion de Dirac. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce circuit.
- ✓ On appelle **réponse indicielle** d'un circuit, le signal de sortie obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un échelon unité. Déterminer la réponse indicielle de ce circuit.

- ✓ On appelle **réponse harmonique** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un signal sinusoïdal. Déterminer la réponse harmonique de ce circuit avec e(t) =5.cos(3t).
- ✓ Montrer qu'après disparition du régime transitoire, la réponse de ce circuit à $e(t) = 5\cos(3t)$ est de la forme : $s(t) = 5A\cos[3t + \varphi]$ avec :
  $A = |H(3j)|$ et $\varphi = \mathrm{Arg}(H(3j))$.

Plus généralement, on admet que : Après disparition du régime transitoire, la réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale $e(t) = e_0\cos(\omega t)$ est de la forme :
$s(t) = e_0 A(\omega)\cos[\omega t + \varphi(\omega)]$ avec : $A(\omega) = |H(j\omega)|$ et $\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}(H(j\omega))$.

3) <u>Fonctionnement d'un système « entrée-sortie » d'ordre 3</u>

Un système « entrée-sortie » est décrit par l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{d^3s}{dt}(t) + \frac{ds}{dt}(t) = e(t) \\ s(0^+) = s'(0^+) = s''(0^+) = 0 \end{cases}$$

a) On note E(p) et S(p) les transformées de Laplace respectives de e(t) et s(t). Déterminer H(p), la fonction de transfert de ce système.

b) Déterminer la réponse impulsionnelle (on pourra vérifier les calculs à l'aide d'un logiciel de calcul formel).

c) Déterminer la réponse indicielle. (on pourra vérifier les calculs à l'aide d'un logiciel de calcul formel).

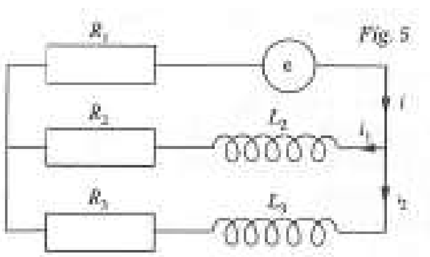
4) <u>Système du second ordre, coefficient d'amortissement</u> :

Soit le système physique, caractérisé par l'équation différentielle :

$$\begin{cases} s''(t) + 2.\lambda.\omega_0 s'(t) + \omega_0^2 s(t) = 2e(t) \\ s(0) = s'(0) = 0 \end{cases}$$ où λ et ω_0 sont des constantes.

a) Déterminer la fonction de transfert de ce système, que l'on notera $H(p, \lambda)$.
b) On pose $\omega_0 = 0.1\mathrm{Hz}$. Avec un logiciel de calcul formel, déterminer la réponse à e(t)=10, que l'on notera $s(t, \lambda)$. Tracer dans un même repère les courbes représentant $s(t, \lambda)$ pour les valeurs de λ égales à 0.2 ; 0.5 ; 0.707 ; 0.8 ; 1 ; 2.

5) <u>Exercice</u> Soit le circuit suivant :



$R_1 = 30\Omega$; $R_2 = 10\Omega$; $R_3 = 20\Omega$
$L_2 = 2\mathrm{H}$; $L_3 = 4\mathrm{H}$

Les intensités i_1 et i_2 vérifient : $\begin{cases} -5i_1 - \frac{di_1}{dt} + 10i_2 + 2\frac{di_2}{dt} = 0 \\ 20i_1 + \frac{di_1}{dt} + 15i_2 = \frac{1}{2}e \\ i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0 \end{cases}$

avec $e(t) = 110\left[U(t) - U\left(t - \frac{1}{10}\right)\right]$

Déterminer i_1 et i_2.

II. Stabilité d'un système

Définition Un système est stable si sa sortie tend vers zéro lorsque l'entrée devient nulle.

Remarque

La fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ avec $\deg(P) \le \deg(Q)$ et

$Q(p) = (p - p_1)^{\alpha_1}(p - p_2)^{\alpha_2}...(p - p_n)^{\alpha_n}$ où p_i sont des nombres réels ou complexes et α_i sont entiers naturels.

Quand l'excitation d'entrée cesse, il reste en sortie une somme de fonctions de la forme :

$y_i(t) = A_i . e^{p_i t} . t^{\alpha_i - 1}$.

y(t) tend donc vers zéro lorsque la partie réelle de tous les p_i sont négatives.

Exercice

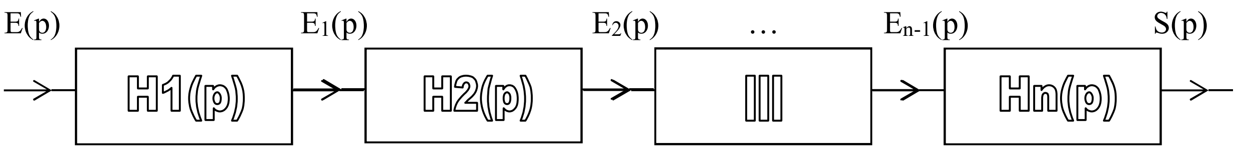
La fonction de transfert d'un système est donnée par : $G(p) = \frac{H(p)}{1+H(p)}$ où

$H(p) = \left(1 + \frac{K}{p}\right)\frac{1}{p(p+3)}$; K est une constante réelle donnée.

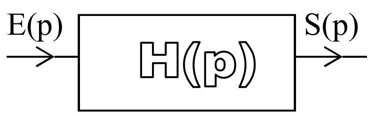
1) Calculer G(p)
2) Vérifier que pour K = 20, on a : $G(p) = \frac{p+20}{(p+4)(p^2-p+5)}$. Déterminer la réponse, dans ce cas, du système à une impulsion de Dirac. Etudier la stabilité du système.
3) Vérifier que pour K = 2.059, la fonction de transfert s'écrit :
   $G(p) = \frac{p+2,059}{(p+2,9)(p^2+0,1p+0,71)}$ Etudier dans ce cas la stabilité du système.

III. Composition des fonctions de transfert

Soit un système composé de plusieurs systèmes en cascade :



Ce système est équivalent au système :



Où : $\boxed{\mathbf{H(p) = H_1(p) \times H_2(p) \times ... \times H_n(p)}}$