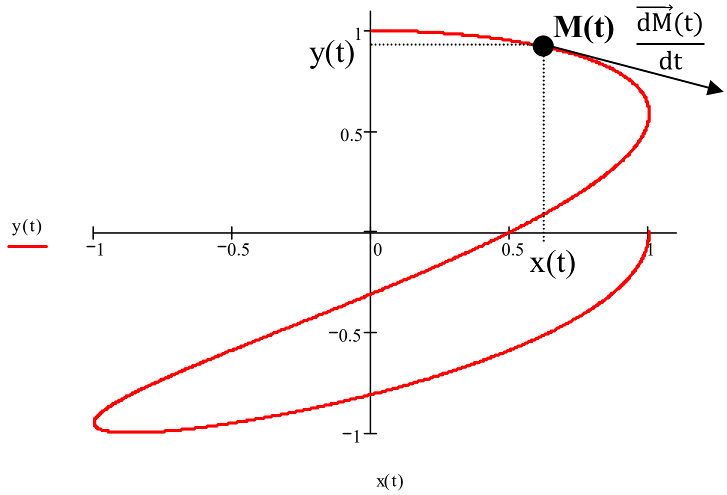
Chapitre 1 : Etude et tracé d'une courbe paramétrée

I. Notions de base

Introduction La trajectoire d'un point M qui se déplace dans le plan est donnée par deux fonctions x(t) et y(t) dépendant de t, le temps.



Le plan étant muni d'une repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note :
M(t) = (x(t),y(t))
ou encore :
$\overrightarrow{OM}(t) = (x(t),y(t))$

Si x et y sont dérivables, on note alors
$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}(t) = \frac{d\vec{M}(t)}{dt} = (x'(t),y'(t))$ c'est le vecteur vitesse du point M(t).

1) Définitions

Soit D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- **Une fonction f : D $\longrightarrow$ $\mathbb{R}^2$ est appelée application vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$**
  $t \longmapsto (x(t),y(t))$

- **Les deux fonctions x : D $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$ et y : D $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in D : f(t) = (x(t), y(t))$ sont appelées les composantes de f.**

- **On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, On note M(t) le point dont les coordonnées sont $f(t) = (x(t), y(t))$. Lorsque le paramètre t parcourt D, le point M(t) décrit un sous-ensemble de points du plan noté C_f et appelé support de l'arc paramétré f (ou par abus de langage courbe paramétrée).**

- **Le système d'équations $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in D$ est appelé une représentation paramétrique de C_f .**

Remarque Cette définition n'a un sens que si x(t) et y(t) existent simultanément, voilà pourquoi, le domaine de définition de la courbe C est : $D = D_x \cap D_y$ où D_x est l'ensemble de définition de la fonction x et D_y, celui de la fonction y.

Exemple : Quel est le domaine de définition de la courbe paramétrée définie par :
$\begin{cases} x(t) = \sqrt{t-3} \\ y(t) = \sqrt{t+2} \end{cases}$?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2) Exemples

✓ Soit f, l'arc paramétré défini par : f(t) = (x(t),y(t)) avec $\begin{cases} x(t) = 2t - 3 \\ y(t) = 3t + 1 \end{cases}$ et D = ℝ .

Déterminer son support.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

✓ Soit g, l'arc paramétré défini par : g(t) = (x(t),y(t)) avec $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ et D = $[0,2\pi]$

Déterminer son support.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

✓ Soit h, l'arc paramétré défini par : h(t) = (x(t),y(t)) avec $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ et D = $[0,4\pi]$

Déterminer son support.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

✓ Soit k, l'arc paramétré défini par : k(t) = (x(t),y(t)) avec $\begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ et D = ℝ

Montrer que son support est le cercle de centre O, l'origine du repère et de rayon 1.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

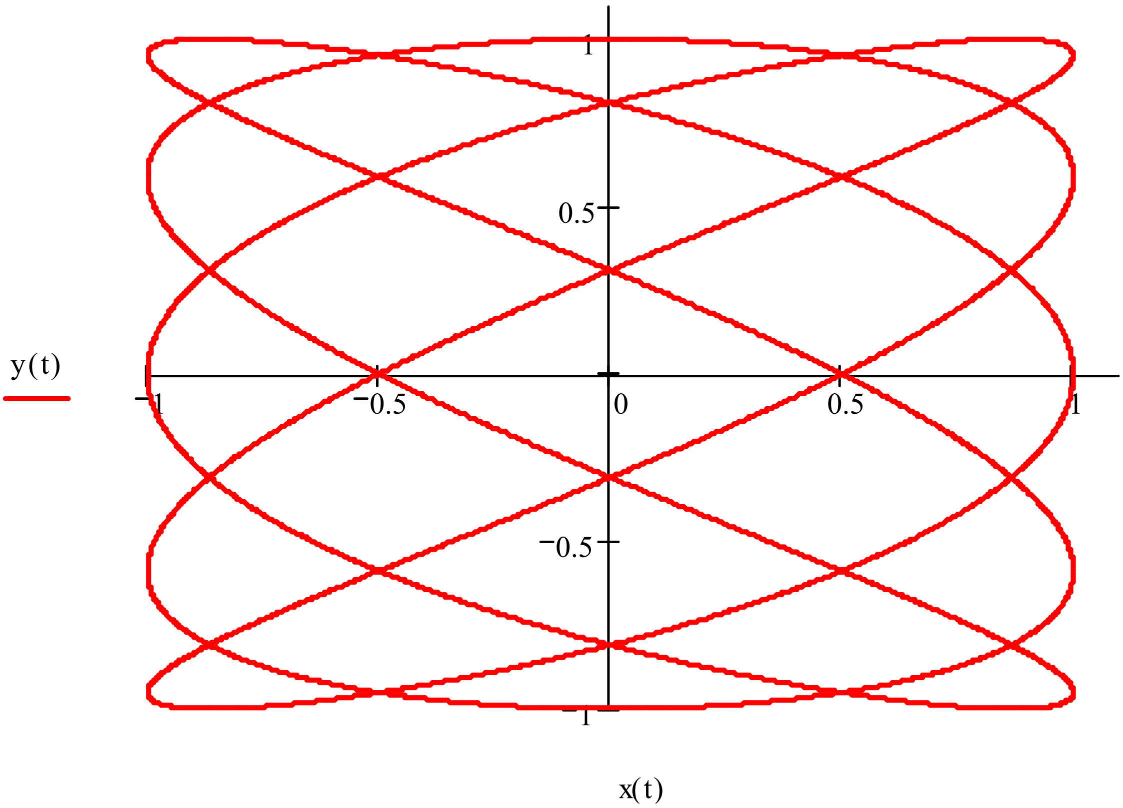
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Remarques Des arcs paramétrés différents peuvent donc avoir un même support. Support qui est donc plus qu'une simple courbe, puisqu'elle est munie d'un sens de parcours, et qu'elle peut être parcourue une ou plusieurs fois suivant les valeurs prises par le paramètre t. **On dit qu'un point M est double lorsqu'il existe t et t', éléments de D, tels que M(t) = M(t').**

- ✓ Figures de Lissajous (ou courbes de Bowditch)

$$\begin{cases} x(t) = \sin(5t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases} \quad t \in [0,2\pi[$$



3) Plan d'étude

Soit f, un arc paramétré f(t) = (x(t),y(t)). Pour étudier f, on procède en 6 étapes :

1. On précise le domaine de définition $D = D_x \cap D_y$ où D_x est l'ensemble de définition de la fonction x et D_y, celui de la fonction y.
2. On réduit le domaine d'étude de f en recherchant périodes et symétries. (voir §II)
3. On construit le tableau de variation de f, en déterminant les signes de $x'(t)$ et $y'(t)$.
et on étudie d'éventuels points particuliers. (voir §III)
4. On recherche les éventuelles branches infinies (voir §IV)
5. On construit la courbe et on recherche éventuellement les points multiples et des points d'intersection avec les axes. (voir §V)

II. Réduction du domaine d'étude

1) Principe

Soit f, un arc paramétré f(t) = (x(t),y(t)) de domaine de définition D. Pour réduire le domaine d'étude de f, on cherche période et symétries éventuelles :

1. Périodicité : Si $\exists$ **T>0 :** $\forall$ **t** $\in$ **D,** $\mathbf{x(t+T) = x(t)}$ **et** $\mathbf{y(t+T) = y(t)}$, la fonction f est alors T-périodique et on restreint l'étude de f à l'intersection de D et d'un intervalle de longueur T.

2. Parité : Si D est symétrique par rapport à 0,

- **cas 1 :** $\forall \mathbf{t} \in \mathbf{D}, \mathbf{x(-t) = x(t)}$ **et** $\mathbf{y(-t) = y(t)}$ (x et y sont paires)
  On restreint alors l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$, et on obtient toute la courbe qui est parcourue deux fois.
- **cas 2 :** $\forall \mathbf{t} \in \mathbf{D}, \mathbf{x(-t) = -x(t)}$ **et** $\mathbf{y(-t) = y(t)}$ (x est impaire et y est paire)
  On restreint alors l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$, et on obtient toute la courbe en complétant par une symétrie par rapport à (Oy).
- **cas 3 :** $\forall \mathbf{t} \in \mathbf{D}, \mathbf{x(-t) = x(t)}$ **et** $\mathbf{y(-t) = -y(t)}$ (x est paire et y est impaire)
  On restreint alors l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$, et on obtient toute la courbe en complétant par une symétrie par rapport à (Ox).
- **cas 4 :** $\forall \mathbf{t} \in \mathbf{D}, \mathbf{x(-t) = -x(t)}$ **et** $\mathbf{y(-t) = -y(t)}$ (x et y sont impaires)
  On restreint alors l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$, et on obtient toute la courbe en complétant par une symétrie par rapport à l'origine O.

Remarque La liste précédente est non exhaustive, il existe en effet d'autres propriétés permettant de réduire l'intervalle d'étude, comme le montre l'exemple ci-dessous.

2) Exemple

Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de l'arc paramétré M suivant :

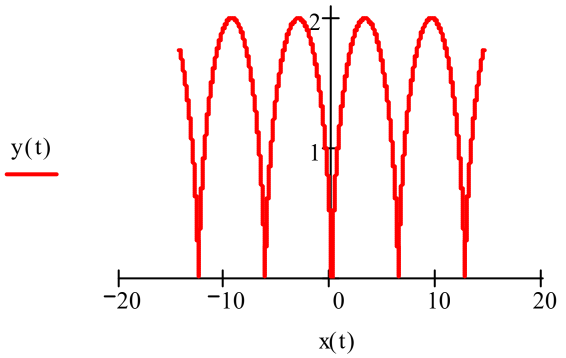
$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………



……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

III. Tableau de variation et points particuliers

1) Définition de points ordinaires, stationnaires et tangente en un point.

Soit f, un arc paramétré f(t) = (x(t),y(t)) défini sur D.
On suppose que les deux fonctions x : D $\longrightarrow \mathbb{R}$ et y : D $\longrightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables en $t_0 \in$ D. Le vecteur $\vec{V}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ est appelé le vecteur dérivé de f en t_0. On note aussi $\vec{V}'(t_0)$ par $\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}(t_0)$.

- Si $\vec{V}'(t_0) \neq \vec{0}$, c'est à dire si $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$, le point $M(t_0)$ est alors dit point ordinaire ou régulier. La droite (T) de vecteur directeur $\vec{V}'(t_0)$ et passant par $M(t_0)$ est appelée tangente à C_f en $M(t_0)$.
Une représentation paramétrique de (T) est donc donnée par :

$$(T) : \begin{cases} x = x(t_0) + (t - t_0)x'(t_0) \\ y = y(t_0) + (t - t_0)y'(t_0) \end{cases} \quad t \in D.$$

- Si $\vec{V}'(t_0) = \vec{0}$, c'est à dire si $(x'(t_0), y'(t_0)) = (0,0)$, le point $M(t_0)$ est alors dit point stationnaire ou singulier.

Remarques

- Dans le cas où $x'(t_0) \neq \vec{0}$, on peut aussi déterminer l'équation de (T) sous la forme y = mx+p, en effet :

…………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

On obtient alors : $\boxed{(T) : y = y(t_0) + \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0))}$

$\boxed{\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \text{ est alors la pente de la tangente au point } M(t_0)}$

- Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, la courbe admet alors une tangente verticale en $M(t_0)$.
- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$, la courbe admet alors une tangente horizontale en $M(t_0)$.
- Dans le cas où $\vec{V}'(t_0) = \vec{0}$, la courbe admet alors une tangente en $M(t_0)$ de pente obtenue en calculant : $\lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$
- Dans tous les cas, la formule de Taylor-Young à l'ordre n au voisinage de t_0 est alors : $\forall t \in D$,

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{x(t) = x(t_0) + (t - t_0)x'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}x''(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{3!}x^{(3)}(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}x^{(n)}(t_0) + o((t - t_0)^n)} \\ \mathbf{y(t) = y(t_0) + (t - t_0)y'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}y''(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{3!}x^{(3)}(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}y^{(n)}(t_0) + o((t - t_0)^n)} \end{cases}}$$

Cette dernière formule permet de préciser la position de la courbe par rapport à la tangente en $M(t_0)$, ainsi que de déterminer si le point $M(t_0)$ est un point de rebroussement, ou d'inflexion. (voir exemples suivants)

2) Exemples

- ✓ Exemple de point de rebroussement de 1[ière] espèce : Etudier l'arc défini par : $\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

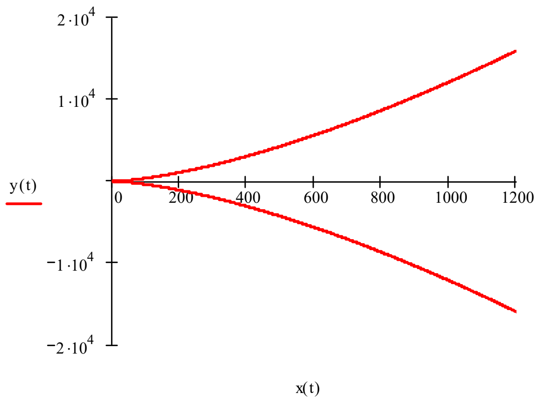
…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

....

....



....

....

....

....

....

....

✓ <u>Exemple de point d'inflexion</u> : Etudier la nature du point M(1) de l'arc défini par :

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - t^2 + 1 \\ y(t) = -t^3 + 7t^2 - 9t + 3 \end{cases}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

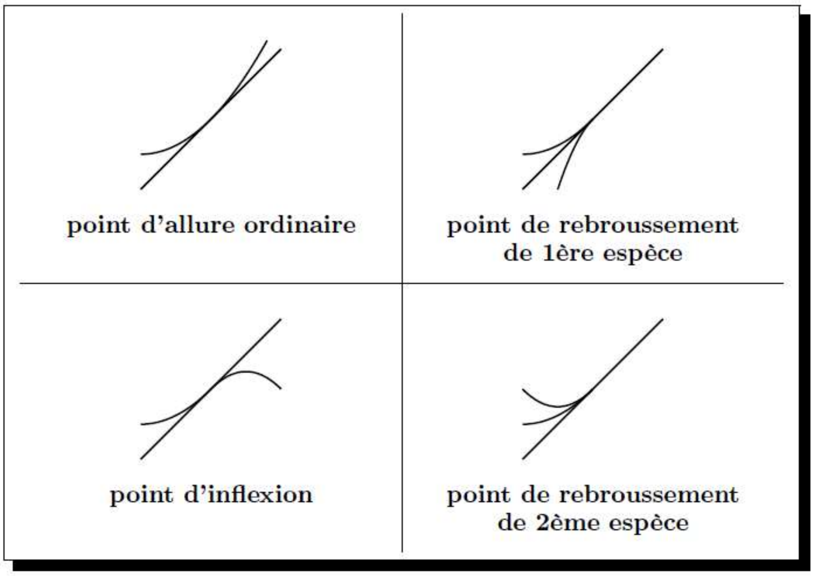
....

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

3) Classification des points :



Intuitivement, on ne peut rencontrer de point de rebroussement qu'en un point stationnaire, car en un point où la vitesse est non nulle, on continue son chemin dans le même sens.

4) Exemple 1

Déterminer le domaine de définition, le domaine d'étude, et le tableau de variation de f définie par :

f(t) = (x(t),y(t)) où : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

IV. Branches infinies

1) Les différentes asymptotes

Soit f, un arc paramétré f(t) = (x(t),y(t)), défini sur un intervalle I. Soit t_0 une borne de I, qui n'est pas dans I. t_0 est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

- Asymptote verticale :
On obtient une telle asymptote lorsque $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$
Elle a alors pour équation : x = a, et on détermine sa position par rapport à C_f, en étudiant le signe de x(t) - a . La courbe coupe l'asymptote lorsque x(t) = a.

- Asymptote horizontale :
On obtient une telle asymptote lorsque $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = a$
Elle a alors pour équation : y = a, et on détermine sa position par rapport à C_f, en étudiant le signe de y(t) - a . La courbe coupe l'asymptote lorsque y(t) = a.

- Asymptote oblique :
On obtient une telle asymptote lorsque

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty \text{ , } \lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$$

$$\underline{\text{et}} \ \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = m \ \text{ finie } \underline{\text{et}} \lim_{t\to t_0}(y(t) - m.x(t)) = p \ \text{ finie}$$

Elle a alors pour équation : y = mx+p, et on détermine sa position par rapport à C_f, en étudiant le signe de y(t) - m.x(t)-p .

2) Suite de l'exemple 1

Déterminer les éventuelles branches infinies de f définie par :

f(t) = (x(t),y(t)) où : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

V. Construction de la courbe

1) A partir du tableau de variation de x et y

- Si x croît et y croît, on va vers la droite et vers le haut
- Si x croît et y décroît, on va vers la droite et vers le bas
- Si x décroît et y croît, on va vers la gauche et vers le haut
- Si x décroît et y décroît, on va vers la gauche et vers le bas.

2) Recherche d'éventuels points multiples

Définition

Soit f, un arc paramétré f(t) = (x(t),y(t)) défini sur D.
S'il existe t et t', éléments de D, tels que : $\begin{cases} x(t') = x(t) \\ y(t') = y(t) \end{cases} \Leftrightarrow M(t') = M(t)$**, alors on dit que le point M(t) et double ou multiple.**

Remarques
- M(t) est triple lorsqu'il existe t"ϵD et $M(t) = M(t') = M(t'')$ etc...
- Résoudre le système $\begin{cases} x(t') = x(t) \\ y(t') = y(t) \end{cases}$ donne souvent de lourds calculs.
- On attend souvent de commencer la construction de la courbe pour voir s'il y a des points multiples et si on doit les chercher.

2) Recherche d'éventuels points d'intersection avec les axes

Suivant le tableau de variation et l'allure de la courbe, on peut être amené à :
- résoudre l'équation x(t) = 0, afin de connaître l'intersection de C_f avec (Ox)
- résoudre l'équation y(t) = 0, afin de connaître l'intersection de C_f avec (Oy)

3) Suite et fin de l'exemple 1

Construire l'allure de la courbe de f définie par :

f(t) = (x(t),y(t)) où : $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{t-1} \\ y(t) = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

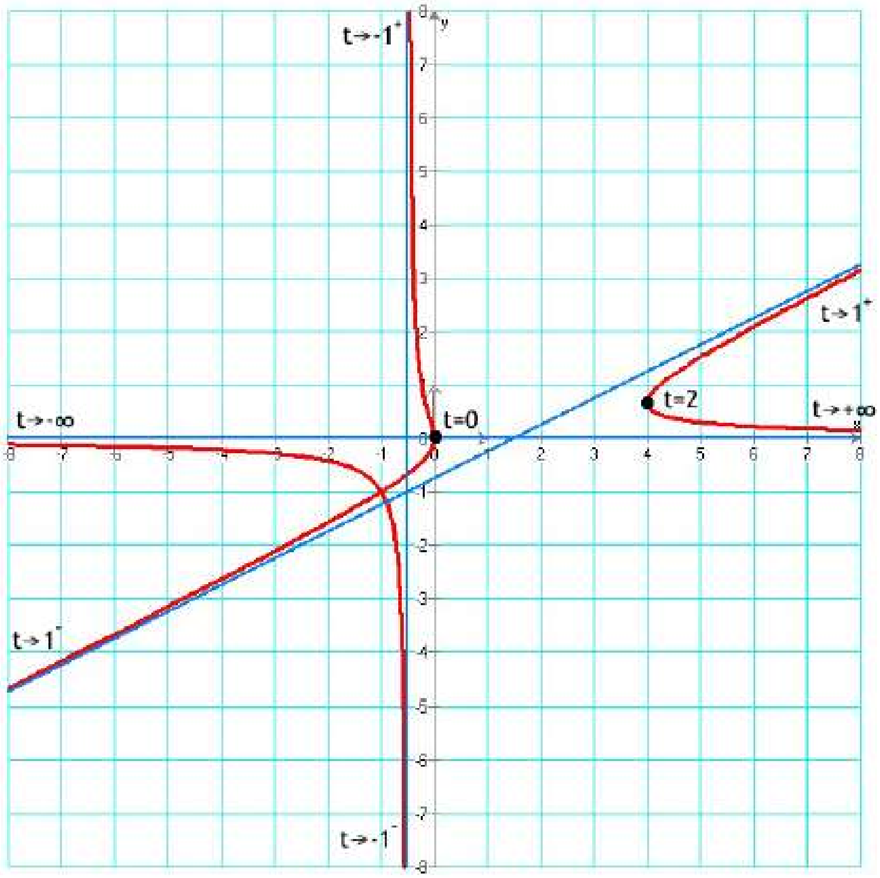
…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………



VI. Etude complète de l'exemple 2

Etudier la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \\ y(t) = 2t + t^2 \end{cases}$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

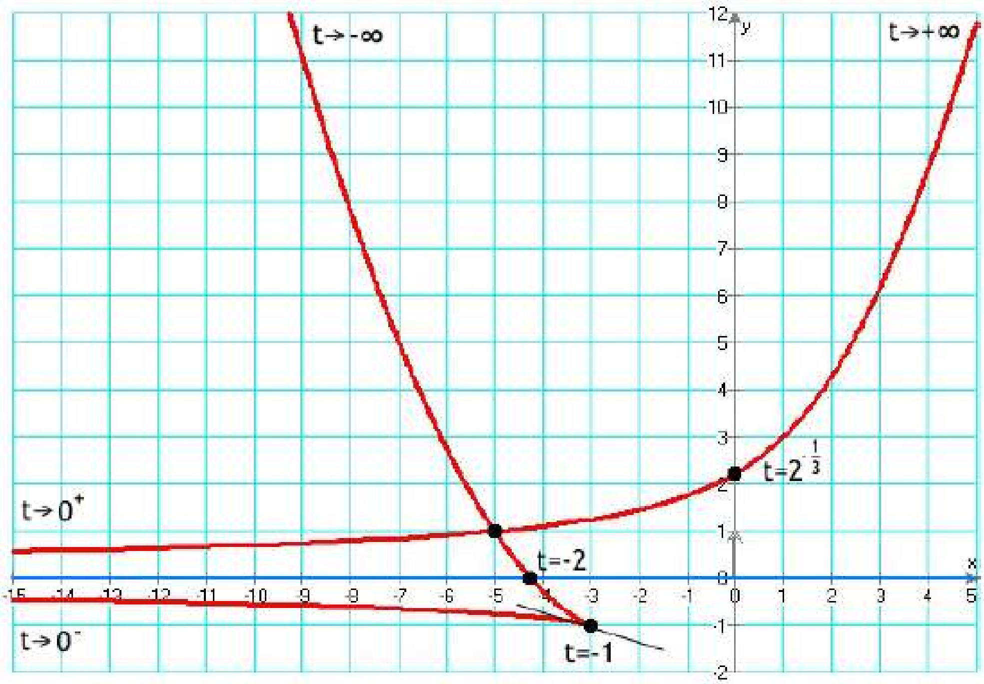
…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………


t→-∞
t→+∞
y
x
t→0+
t→0-
t=2^(-1/3)
t=-2
t=-1

VII. Exercices du chapitre 1

Etudiez et dessinez les courbes suivantes :

a. $\begin{cases} x(t) &= t^2 \\ y(t) &= t^3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) &= \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$

c. $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) &= \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

d. $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) &= \dfrac{3t^2}{1+t^2} \end{cases}$

e. $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{e^{-t}}{t} \\ y(t) &= \dfrac{1}{t(t-1)} \end{cases}$

f. $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{e^{-t}}{t} \\ y(t) &= \dfrac{1}{t(t+2)} \end{cases}$

g. $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{\ln(t)}{t} \\ y(t) &= t\ln(t) \end{cases}$

h. $\begin{cases} x(t) &= a(t-\sin(t)) \\ y(t) &= a(1-\cos(t)) \end{cases}$

i. $\begin{cases} x(t) &= a\cos^3(t) \\ y(t) &= a\sin^3(t) \end{cases}$

j. $\begin{cases} x(t) &= a\cos^3(t) \\ y(t) &= a\sin(t) \end{cases}$