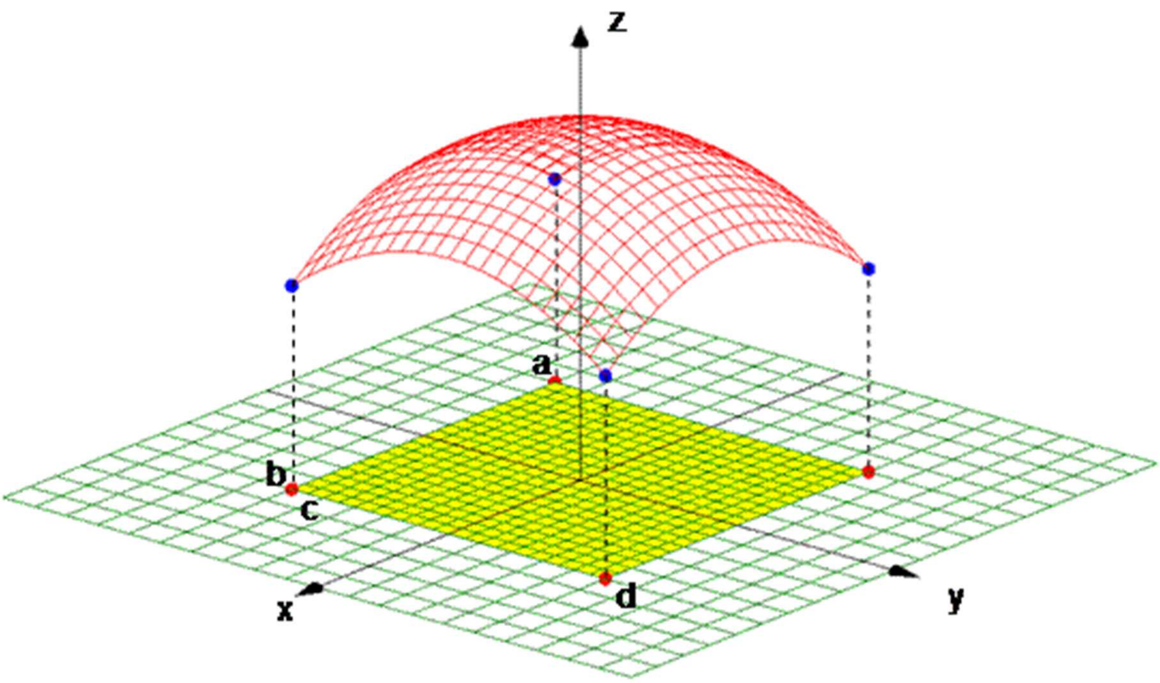
UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

Outils mathématiques du semestre 4

Fonctions à plusieurs variables et intégrales multiples



Enseignant : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

Table des matières

Partie A : Fonctions à plusieurs variables

I. Définitions

Une fonction numérique f, de n variables est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, qui associe à tout n-uplet de nombres réels $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ un unique réel $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
D_f, l'ensemble de définition de f est l'ensemble des $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ éléments de $\mathbb{R}^n$, tels que $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ existe.

Exemples

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$

……………………………………………………………………………………………..

……………..……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $h(x,y)=e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

……………………………………………………………………………………………..

……………..……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

……………………………………………………………………………………………..

……………..……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $k(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2}$

……………………………………………………………………………………………..

……………..……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………..……………………………………………………………………………

II. Limites et continuité

Exemples de limites Déterminer la limite en (0,0) des fonctions f suivantes :

Soit $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{(0,0)} f(x,y) =$ ……………………………………..

Soit $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{(0,0)} f(x,y) =$ …………………………………….

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Définition **Soit f, une fonction à 2 variables réelles (x,y). Soit $(x_0,y_0) \in D_f$. f est dite continue en (x_0,y_0) si et seulement si $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.**

On pourra écrire cette définition quelque soit le nombre de variables.

Opérations

Soit $\lambda \in IR$. Si f et g sont continues sur D, sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, alors f+g, λf, f.g sont continues sur D, et $\dfrac{f}{g}$ est continue sur le sous-ensemble de D où g ne s'annule pas.

Exemples Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ ………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

III. Représentation graphique

Exemple $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ $D_f=\mathbb{R}^2$. Soit $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

Partie B : Calcul différentiel

I. Dérivées partielles du premier et du second ordre

1) Dérivées partielles du premier ordre

Définition Soit f une fonction définie dans D_f, sous-ensemble de IR^2 .
Si les fonctions $\begin{cases} f_1(x) = f(x,y_0) \text{ où } (x,y_0) \in D_f \\ f_2(y) = f(x_0,y) \text{ où } (x_0,y) \in D_f \end{cases}$ **sont dérivables respectivement en x_0 et y_0, la fonction f est alors dite partiellement dérivable par rapport à x et y en (x_0,y_0).**
On note alors :
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0) = f_1'(x_0)$ **et** $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = f_2'(y_0)$
Si les dérivées partielles existent pour tout (x_0,y_0), élément de D_f, elles définissent alors les fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ **et** $\frac{\partial f}{\partial y}$**.**

Exemples :

$f(x,y) = e^{x+2y}$. D_f=…………………..

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$ ……………………………………… $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$ …………………………………..

$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. D_f=…………………..

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$ ……………………………………… $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$ …………………………………..

Remarque : ………………………………………………………………………………...

$R(r,s) = \frac{rs}{(r+s)^2}$. D_R=………………………………………………………………………

$\frac{\partial R}{\partial r}(r,s) =$ ………………………………………………………………………………

$\frac{\partial R}{\partial s}(r,s) =$ ………………………………………………………………………………

Remarque On peut étendre cette définition aux fonctions à plus de deux variables :
Soit f une fonction définie dans D_f, sous-ensemble de IR^3 .

Si les fonctions $\begin{cases} f_1(x) = f(x, y_0, z_0) \text{ où } (x, y_0, z_0) \in D_f \\ f_2(y) = f(x_0, y, z_0) \text{ où } (x_0, y, z_0) \in D_f \\ f_3(z) = f(x_0, y_0, z) \text{ où } (x_0, y_0, z) \in D_f \end{cases}$ sont dérivables respectivement en x_0 y_0, et z_0 , la fonction f est alors dite partiellement dérivable par rapport à x, y et z en (x_0,y_0,z_0). On note alors :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) = f_1'(x_0)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = f'_y(x_0, y_0, z_0) = f_2'(y_0)$ et

$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = f'_z(x_0, y_0, z_0) = f_3'(z_0)$.

Si les dérivées partielles existent pour tout (x_0,y_0,z_0), élément de D_f, elles définissent alors les fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

2) Plan tangent à une surface d'équation z=f(x,y) en un point

Soit f une fonction partiellement dérivable en (x_0,y_0). L'équation du plan tangent à S_f, la surface représentant f, au point $M(x_0,y_0,z_0)$ est alors :

$$\mathbf{z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Exemple $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$ D_f=

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ .... ; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$ ....

Equation du plan tangent à S_f au point M(0,0,f(0,0)) : ……………………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

Equation de P_f , le plan tangent à S_f au point M(-1,5,f(-1,5)) : …………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

3) Dérivées partielles du second ordre

Définition **Soit f une fonction définie dans D_f, sous-ensemble de IR^2 . f est partiellement dérivable sur D, sous-ensemble de D_f. Si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$ sont elles-mêmes partiellement dérivables, on peut alors définir les dérivées partielles du second ordre :**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2} \; ; \; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} \; ;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} \; ; \; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2} .$$

Remarque On peut étendre cette définition aux fonctions à plus de deux variables :

Soit f une fonction définie dans D_f, sous-ensemble de IR^3 . f est partiellement dérivable sur D, sous-ensemble de D_f. Si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = f'_z$ sont elles-mêmes partiellement dérivables, on peut alors définir les dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2} \;;\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} \;;\; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} \;;\; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}$$

et …………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

Exemple $f(x, y) = e^{x+2y}$. $D_f = \mathbb{R}^2$

Déterminer les dérivées partielles du second ordre de f.

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

3) Théorème de Schwarz

Si f : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ admet en un point (x_0,y_0) des dérivées partielles d'ordre 2, continues (on dit alors que f est de classe C^2), alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) .$$

La réciproque est fausse.

Exemple

$f(x, y) = \mathrm{Arc}\tan\left(\frac{y}{x}\right)$. $D_f = IR^* \times IR$

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

II Recherche d'extrema

1) Définitions

Soit une fonction f : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
- On dit que f admet un minimum local (resp. maximum local) en (x_0,y_0) s'il existe un voisinage V de (x_0,y_0) tel que :

$$f(x,y) \geq f(x_0,x_0) \ \ \forall(x,y) \in V \text{ (resp. } f(x,y) \leq f(x_0,x_0)\text{)}$$

Lorsque l'on peut prendre pour V, tout l'ensemble de définition de f, on parle de minimum ou de maximum global.
Un extremum est un maximum ou un minimum.
- Si f est de classe C^2 en (x_0,y_0), on appelle matrice hessienne de f, la matrice carrée, notée H(f) de ses dérivées partielles secondes : $H(f)(x_0,y_0) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Remarque On peut étendre ces définitions aux fonctions à plus de deux variables

2) Proposition

Soit une fonction f : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 en (x_0,y_0) et telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

- Si det(H(f) (x_0,y_0))>0 et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$, alors f admet un minimum local en (x_0,y_0),
- Si det(H(f) (x_0,y_0))>0 et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0$, alors f admet un maximum local en (x_0,y_0),

- Si det(H(f) (x_0,y_0))<0, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0,y_0). On parle alors de point selle ou encore de point col,
- Si det(H(f) (x_0,y_0))=0, alors on ne peut pas conclure, et il faut étudier le signe de : f(x,y) - f(x_0,y_0).

Remarque Cette proposition ne s'applique qu'à des fonctions à deux variables.

3) Exemples

Exemple1 Trouver les extrema de la fonction $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

<u>Exemple 2</u> Trouver les extrema de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

<u>Exemple 3</u> Trouver les extrema de la fonction $f(x,y) = \cos x + y^2$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Exemple 4 Trouver les extrema de la fonction $f(x,y) = 4x^2y + 2x^3 - 4xy + 2x + 1$

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

III. Différentielle

1) Définitions

Les fonctions f : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

Qui admettent des dérivées partielles continues sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ sont dites de classe C^1 sur V. On dit qu'elles sont alors différentiables sur V, et si (x_0,y_0) est dans V, alors la différentielle de f en (x_0,y_0) est : $\mathbf{df}_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).dy$

Remarque Si f est définie dans un sous ensemble de IR^3, alors $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$.

Exemple $f(x,y) = \text{Arc}\tan\left(\frac{y}{x}\right)$. $D_f = IR^* \times IR$

df(x,y)=…………………………………………………………………………………

Propriétés	$\begin{cases} \mathbf{d(\lambda f + \mu g) = \lambda\, df + \mu\, dg} \\ \mathbf{d(fg) = g\, df + f\, dg} \\ \mathbf{d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\, df - f\, dg}{g^2}} \\ \mathbf{d(\ln f) = \frac{df}{f}} \end{cases}$

2) Application

On suppose que les variables x et y varient respectivement de $\Delta x = dx$ et $\Delta y = dy$.
Si dx et dy sont proches de 0, on peut approximer la variation de la fonction f, notée $\Delta f = f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$ par $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

3) Application Soit $R = \frac{\rho l}{s}$. Donner une formule d'approximation de ΔR pour des accroissements petits des variables ρ, l, s. Donner une formule d'approximation relative $\frac{\Delta R}{R}$ en considérant lnR.

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

Partie C : Calcul d'intégrales doubles

I. Généralités :

1) Domaine fermé de $\mathbb{R}^2$

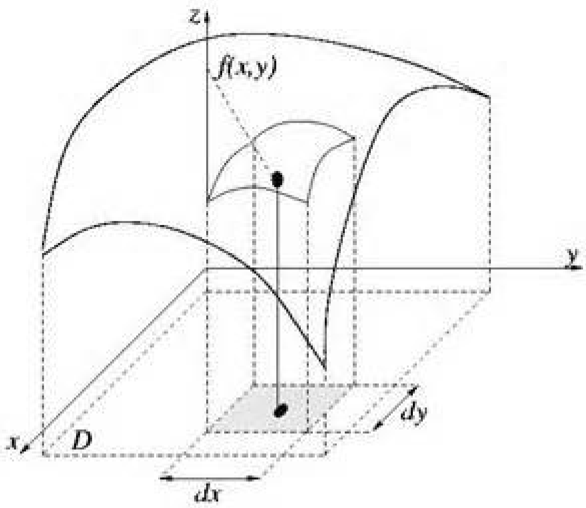
Définition **On appelle domaine fermé de $\mathbb{R}^2$ tout domaine du plan délimité par une courbe fermée**

Exemples

$$D_1 = [0;1]\times[-1;3] = \{(x,y)\in IR^2 / x\in[0;1] \text{ et } y\in[-1;3]\}$$
$$D_2 = \{(x,y)\in IR^2 /(x-2)^2+(y+3)^2 \leq 4\}$$

2) Intégrale double

Définition/théorème **Soit f, une fonction continue dans D, un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$. Alors l'intégrale double $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ existe.**



3) Applications

- Si $f(x,y)=1\ \forall (x,y)\in D$, alors $I=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ représente l'aire du domaine D.
- Si f(x,y) est la masse surfacique au point M(x,y) du domaine D, alors $I=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ est la masse du domaine D.
- Soit A, l'aire du domaine D. Les coordonnées du centre de gravité G de D sont données par les intégrales : $x_G=\frac{1}{A}\iint_D x\,dxdy$ et $y_G=\frac{1}{A}\iint_D y\,dxdy$

4) Propriétés

Soient D un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$; f et g, deux fonctions continues sur D ;
α et β deux nombres réels.
- Si $f(x,y)\geq 0\ \forall(x,y)\in D$, alors $\iint_D f(x,y)\,dxdy\ \geq 0$
- $\iint_D (\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))\,dxdy=\alpha\iint_D (f(x,y)dxdy+\beta\iint_D g(x,y)\,dxdy$
- Si $D=D_1\cup D_2$ où D_1 et D_2 sont deux domaines fermés de $\mathbb{R}^2$ et disjoints ($D_1\cap D_2$ = Ø) alors : $\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$

II. Calcul d'une intégrale double en coordonnées cartésiennes :

Théorème de Fubini **Soit f, une fonction continue dans D, un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$. On peut calculer l'intégrale double $I=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ en intégrant soit d'abord par rapport à la variable x, soit d'abord par rapport à la variable y :**

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_D f(x,y)\,dydx$$

1) 1er cas : D est un domaine fermé rectangulaire de $\mathbb{R}^2$

Exemple Calculer $I=\iint_D (x+y)\,dxdy$ où $D=[0;2]\times[0;1]$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

Application du théorème de Fubini

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dx\,dy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dy\,dx$$

Cas particulier : Calculer $I=\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy$ lorsque $f(x,y)=g(x)h(y)$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Exemple $I = \displaystyle\iint_{[0,\pi]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]} \sin(3x).\tan(y)\,dxdy$

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

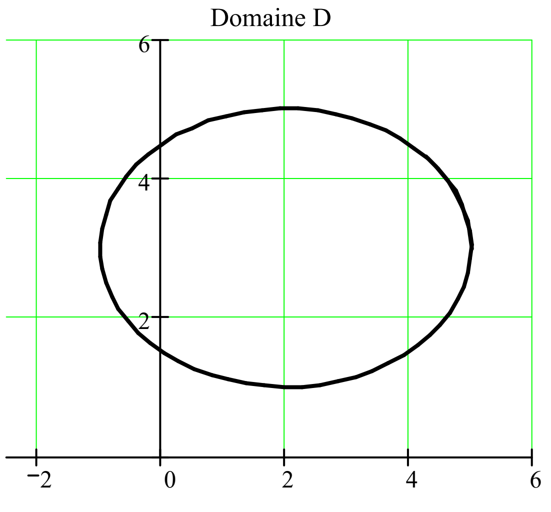
……………………………………………………………………………………………...

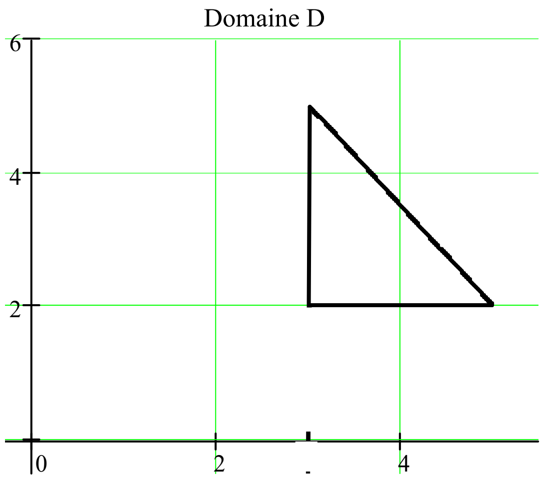
2) 2ème cas : D est un domaine fermé quelconque de $\mathbb{R}^2$

D'après le théorème de Fubini, on peut calculer $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ soit :

a) En intégrant d'abord par rapport à la variable y

On suppose alors que toute parallèle à l'axe (Oy) coupe la courbe délimitant D en au plus deux points ou en une infinité de points :

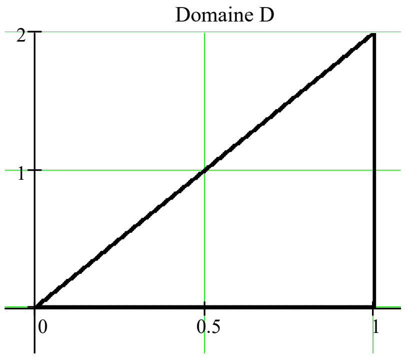




On fixe $x \in [a,b]$, alors $y \in [y_1(x), y_2(x)]$ et on obtient :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$

Exemple Calculer $I = \iint_D xy^2 \; dxdy$ où D est le domaine représenté ci-dessous :



I=……………………………………………………....

…………………………………………………………

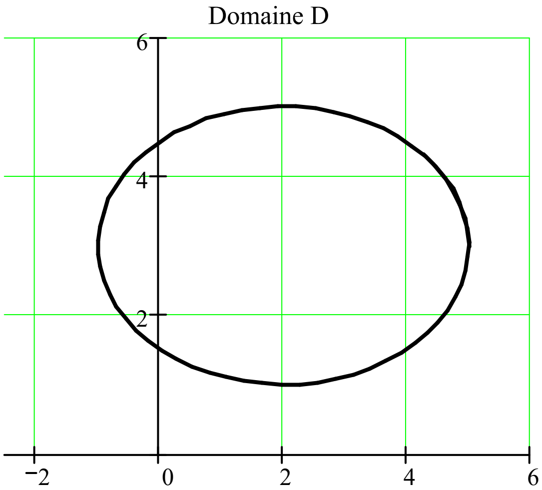
…………………………………………………………

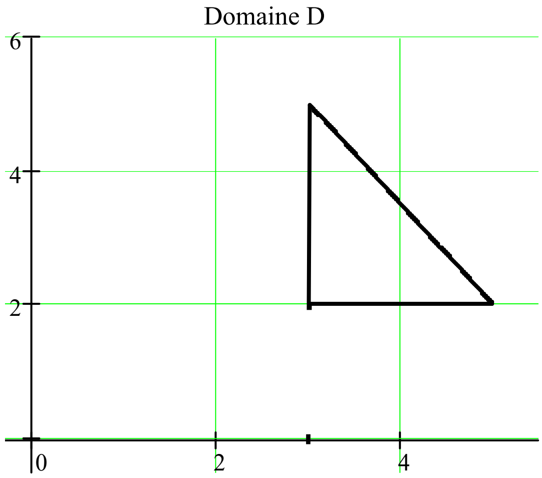
…………………………………………………………

…………………………………………………………

b) En intégrant d'abord par rapport à la variable x

On suppose alors que toute parallèle à l'axe (Ox) coupe la courbe délimitant D en au plus deux points ou en une infinité de points :

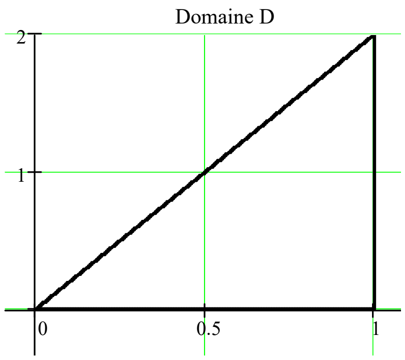




On fixe $x \in [c, d]$, alors $x \in [x_1(y), x_2(y)]$ et on obtient :

$$\iint_D f(x, y) \, dxdy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \; dy$$

Exemple Calculer $I = \iint_D xy^2 \; dxdy$ où D est le domaine représenté ci-dessous :



I=……………………………………………………....

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

3) Exercices

Exercice 1 Calculer l'intégrale double : $\iint_D xydxdy$ avec successivement :

$D=\{(x,y) / 2 \geq x \geq 0 \ , \ 3 \geq y \geq -2\}$

D est le plan limité par les paraboles d'équations $y=x^2$ et $x=y^2$.

Exercice 2 Tracer le domaine D du plan limité par les courbes $y=x^2$, $x=2$, $y=1$; puis calculer $I=\iint_D (x^2+y^2)dxdy$

Exercice 3 Soit $D=\{(x,y) / 1 \geq x \geq 0, x^2 \leq y \leq 2-x\}$. Représenter puis calculer l'aire de D.

III. Changement de variables

1) Définitions

Changement de coordonnées : Soit Δ et D deux domaines fermés de $\mathbb{R}^2$. On appelle transformation de Δ dans D toute fonction vectorielle bijective $\begin{array}{l}\varphi : \Delta \to D \\ (u,v) \mapsto (x,y) = \varphi(u,v)\end{array}$

Jacobien : $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. Si les fonctions numériques $(u,v) \mapsto x(u,v)$ et $(u,v) \mapsto y(u,v)$ admettent des dérivées partielles continues sur Δ (i.e φ est de classe C^1), alors on appelle Jacobien de φ et on note $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ le déterminant défini par :

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} .$$

Remarque φ étant bijective, φ^{-1} existe. φ^{-1} est alors une transformation de D en Δ **. Le** jacobien de φ^{-1} noté $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$, et donc l'inverse du jacobien de φ .

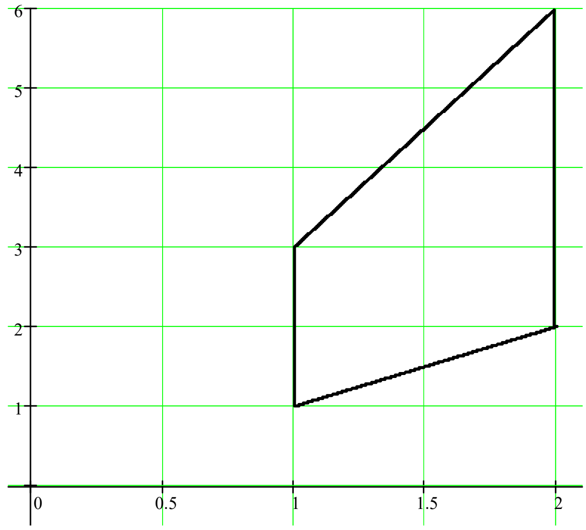
2) Calcul d'une intégrale double par changement de variables

Soit f une fonction continue sur D un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$. Soit φ une transformation de Δ en D de classe C^1 : $\begin{array}{l}\varphi : \Delta \to D \\ (u,v) \mapsto (x,y) = \varphi(u,v)\end{array}$.

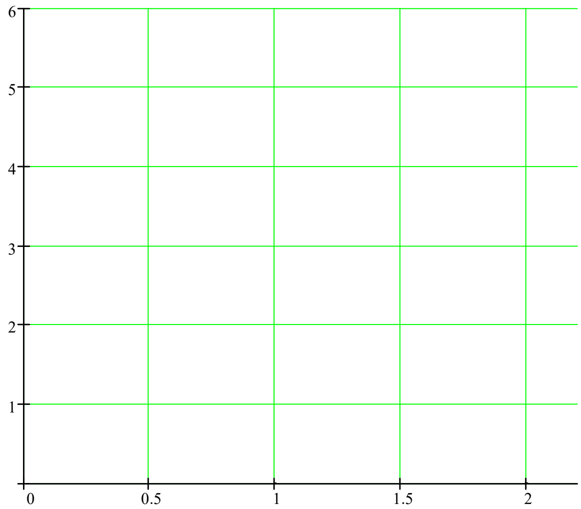
On obtient alors : $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv$

<u>Exemple</u> Calculer l'intégrale $I = \iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$ où D est le domaine ci-dessous, en utilisant le changement de variable : $\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$.

Domaine D



Domaine Δ



……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

3) Passage en coordonnées polaires

Lorsque le domaine d'intégration est un disque ou une portion de disque, le calcul d'une intégrale double est simplifié si l'on passe en coordonnées polaires (r,θ) :

$$\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases} \text{ avec } r \geq 0 \text{ et } \theta \in [0,2\pi[\,.$$

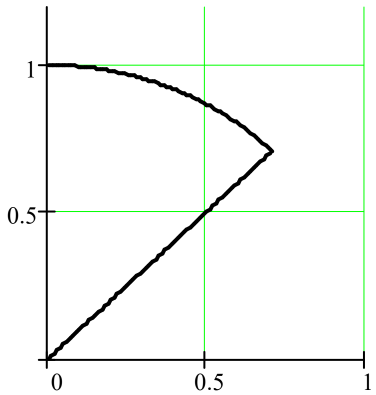
Le jacobien est alors :

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On obtient alors : $\boldsymbol{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta}$

Exemple Calculer $I = \iint_D xy\,dxdy$ où D est le domaine délimité par le cercle de centre O et de rayon 1, la droite d'équation y=x et l'axe des ordonnées.

Domaine D



Domaine Δ

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

4) Exercices

Exercice 1 **:** Calculer au moyen d'un passage en coordonnées polaires, les intégrales suivantes :

$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ où $D=\{(x,y)\,/\,x^2+y^2\leq 1\ ;\ y\geq 0\}$.

$J=\iint_D \dfrac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$ avec $D=\{(x,y)\,/\ x\geq 1\ ,\ x^2+y^2-2x\leq 0\}$

Exercice 2 : Au moyen du changement de variable $\begin{cases} x+y=u \\ y=uv \end{cases}$ vérifier que :

$$\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy=\frac{e-1}{2} \text{ lorsque } D=\{(x,y)\,/\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}.$$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………..

IV. Exercices sur les intégrales doubles

Exercice 1 : Déterminer à l'aide d'intégrales doubles, les coordonnées du point de gravité du domaine D suivant : $D = \{(x,y) \in IR^2 \,/\, 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le x\}$. Retrouver ce résultat géométriquement.

Exercice 2 : Calculer les intégrales doubles suivantes

$$I_1 = \iint_D \left(x + \frac{x}{y} \right) dxdy \quad \text{où } D = [0;1] \times [1;e]$$

$$I_2 = \iint_D xydxdy \quad \text{où } D = \{(x,y) \in IR^2 \,/\, 0 \le x;\ 0 \le y \le 1; x + y \le 3\}$$

$$I_3 = \iint_D xe^{x+2xy} dxdy \quad \text{où } D = \{(x,y) \in IR^2 \,/\, x \le 2;\ y \le 2; xy \ge 3\}$$

$$I_4 = \iint_D \frac{y}{x^2+1} dxdy \quad \text{où } D = \{(x,y) \in IR^2 / x \ge 0; y \ge 0; x^2 + y^2 \le 1\}$$

$$I_5 = \iint_D \ln(x+y) dxdy \quad \text{où } D = \{(x,y) \in IR^2 \,/\, 0 \le x \le 1; 1 \le y \le 1 + x\}$$

$$I_6 = \iint_D |x+y| dxdy \quad \text{où } D = \{(x,y) \in IR^2 \,/ |x| \le 1, |y| \le 1\}$$

Exercice 3 : Changement de coordonnées. Calculer $I = \iint_D x^2 dxdy$ où D est le demi-disque de rayon R, centré en A(R,0), situé dans le demi-plan d'équation $y \ge 0$

Exercice 4 : Pour tout réel a<0, on pose :

$$I_a = \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2} dxdy \quad \text{et} \quad J_a = \iint_{\Delta_a} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

avec $D_a = \{(x,y) \in IR^2 \,/\, x \ge 0, y \ge 0 \text{ et } x^2 + y^2 \le a^2\}$ et
$\Delta_a = \{(x,y) \in IR^2 \,/\, 0 \le x \le a, 0 \le y \le a\}$

1) Calculer I_a
2) Montrer que : $\forall$ a>0, $I_a \le J_a \le I_{a\sqrt{2}}$. En déduire $\lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-x^2} dx$

Partie D : Calcul d'intégrales Triples

I. Généralités :

1) Domaine fermé de $\mathbb{R}^3$

Définition On appelle domaine fermé de $\mathbb{R}^3$ tout domaine de l'espace délimité par une surface fermée

Exemples

$$D_1 = [0;1]\times[0;1]\times[0;1] = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x \in [0;1],\ y \in [0;1] \text{ et } z \in [0;1]\}$$
$$D_2 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

2) Intégrale triple

Définition/théorème Soit f, une fonction continue dans D, un domaine fermé de $\mathbb{R}^3$. Alors l'intégrale triple $I = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ existe.

3) Applications

- Si $f(x,y,z) = 1\ \forall (x,y,z) \in D$, alors $I = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ représente le volume du domaine D.
- Si f(x,y,z) est la masse volumique au point M(x,y,z) du domaine D, alors $I = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ est la masse du domaine D.

4) Propriétés

Soient D un domaine fermé de $\mathbb{R}^3$; f et g, deux fonctions continues sur D ;
α et β deux nombres réels.
- Si $f(x,y,z) \geq 0 \ \forall(x,y,z) \in D$, alors $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz \geq 0$
- $\iiint_D (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))dxdydz = \alpha \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz + \beta \iiint_D g(x,y,z)\,dxdydz$
- Si $D = D_1 \cup D_2$ où D_1 et D_2 sont deux domaines fermés de $\mathbb{R}^3$ et disjoints ($D_1 \cap D_2$ = Ø) alors : $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dxdydz$

II. Calcul d'une intégrale triple en coordonnées cartésiennes :

Théorème de Fubini Soit f, une fonction continue dans D, un domaine fermé de $\mathbb{R}^3$. On peut calculer l'intégrale triple $I = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ en intégrant soit d'abord par rapport à la variable x, soit d'abord par rapport à la variable y, soit d'abord par rapport à z.

1) 1er cas : D est un parallélépipède rectangle de $\mathbb{R}^3$

Exemple Calculer $I = \iiint_D (x+y+z)\,dxdydz$ où $D = [0;1] \times [-1;1] \times [1;2]$

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

<u>Application du théorème de Fubini</u>

$$\mathbf{\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,g]} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b\int_e^g\int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx = \int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \ldots}$$

<u>Cas particulier</u> : Calculer $I = \iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,g]} f(x,y,z)\,dxdydz$ lorsque $f(x,y) = g(x)h(y)k(z)$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

<u>Exemple</u> $I = \iiint_{[0,1]\times[0,2]\times[0,3]} x(y-1)(z-2)\,dxdydz$

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

2) 2ème cas : D est un domaine fermé quelconque de $\mathbb{R}^3$

D'après le théorème de Fubini, on peut calculer $I = \iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz$ soit :

a) En intégrant d'abord par rapport à la variable z

On suppose alors que toute parallèle à l'axe (Oz) coupe la surface délimitant D en au plus deux points ou en une infinité de points :

On projette le domaine D sur le plan xOy parallèlement à l'axe (Oz), on obtient alors le domaine d de $\mathbb{R}^2$.
On fixe $(x, y) \in d$, alors $z \in \left[z_1(x, y), z_2(x, y)\right]$ et on obtient :

$$I = \iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_d \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dxdy$$

Exemple Calculer le volume d'un tétraèdre de côtés 1m :

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

b) <u>En intégrant d'abord par rapport à la variable y</u>

On suppose alors que toute parallèle à l'axe (Oy) coupe la surface délimitant D en au plus deux points ou en une infinité de points. On projette le domaine D sur le plan xOz parallèlement à l'axe (Oy), on obtient alors le domaine d de $\mathbb{R}^2$.
On fixe $(x, z) \in d$, alors $y \in [y_1(x,z), y_2(x,z)]$ et on obtient :

$$I = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_d \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\,dxdz$$

c) <u>En intégrant d'abord par rapport à la variable x</u>

On suppose alors que toute parallèle à l'axe (Ox) coupe la surface délimitant D en au plus deux points ou en une infinité de points. On projette le domaine D sur le plan yOz parallèlement à l'axe (Ox), on obtient alors le domaine d de $\mathbb{R}^2$.
On fixe $(y, z) \in d$, alors $x \in [x_1(y,z), x_2(y,z)]$ et on obtient :

$$I = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_d \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\,dydz$$

3) <u>Exercices</u>

Calculer les intégrales triples suivantes :

$I = \iiint_D \sin(x+y+z)dxdydz$ où $D = \left\{(x,y,z) \,/\, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le z \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$

$J = \iiint_D dxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \,/\, x^2 + y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le h\}$, avec h fixé strictement positif.

Que représente J ?

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

III. Changement de variables

1) Définitions

Changement de coordonnées : Soit Δ et D deux domaines fermés de $\mathbb{R}^3$. On appelle transformation de Δ dans D toute fonction vectorielle bijective

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \Delta & \to & D \\ & (u,v,w) & \mapsto & (x,y,z) = \varphi(u,v,w) \end{array}$$

Jacobien : $\varphi(u,v,w) = \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)$. Si les fonctions numériques $(u,v,w) \mapsto x(u,v,w)$, $(u,v,w) \mapsto y(u,v,w)$ et $(u,v,w) \mapsto z(u,v,w)$ admettent des dérivées partielles continues sur Δ, alors on appelle Jacobien de φ et on note $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ le déterminant défini par :

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}$$

Remarque φ étant bijective, φ^{-1} existe. φ^{-1} est alors une transformation de D en Δ **. Le** jacobien de φ^{-1} noté $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$, et donc l'inverse du jacobien de φ .

2) Calcul d'une intégrale triple par changement de variables

Soit f une fonction continue sur D un domaine fermé de $\mathbb{R}^3$. Soit φ une transformation de Δ en D : $\begin{array}{rccl} \varphi : & \Delta & \to & D \\ & (u,v,w) & \mapsto & (x,y,z) = \varphi(u,v,w) \end{array}$.

On obtient alors :

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_\Delta f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Exemple En utilisant le changement de variable : $\begin{cases} u = \dfrac{x}{a} \\ v = \dfrac{y}{b} \\ w = \dfrac{z}{c} \end{cases}$ où a,b,c>0, calculer l'intégrale

$I = \iiint_D dxdydz$ où $D = \left\{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} \leq 1\right\}$.

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

3) Passage en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z)

Lorsque le domaine d'intégration est un cylindre ou une portion de cylindre, le calcul d'une intégrale triple est simplifié si l'on passe en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) :

$\begin{cases} x(\rho,\theta,z) = \rho\cos\theta \\ y(\rho,\theta,z) = \rho\sin\theta \\ z(\rho,\theta,z) = z \end{cases}$ avec $\rho \geq 0$, $\theta \in [0,2\pi[$ et $z \in IR$. Le jacobien est alors :

$\dfrac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} =$ ……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

On obtient alors : $\displaystyle\iiint_D \mathbf{f(x,y,z)\,dxdydz} = \iiint_\Delta \mathbf{f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho d\rho d\theta dz}$

Exemple Calculer le volume d'un cône droit de hauteur h :
$D = \left\{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, 0 \leq z \leq h,\ x^2 + y^2 \leq z^2\right\}$

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Exercice

Calculer au moyen d'un passage en coordonnées cylindriques, les intégrales suivantes :

I= $\iiint_D z.\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ où $D=\{(x,y,z)/x^2+y^2\le R^2\,;0\le z\le h\}$.

4) Passage en coordonnées sphériques (r,θ,φ)

Lorsque le domaine d'intégration est une sphére ou une portion de sphère, le calcul d'une intégrale triple est simplifié si l'on passe en coordonnées sphériques (r,θ,φ) :

$\begin{cases} x(r,\theta,\varphi)=r\cos\theta\sin\varphi \\ y(r,\theta,\varphi)=r\sin\theta\sin\varphi \\ z(r,\theta,\varphi)=r\cos\varphi \end{cases}$ avec $r\ge 0$, $\theta\in[0,2\pi[$ et $\varphi\in[0,\pi[$. Le jacobien est alors :

$\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=$ ……………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

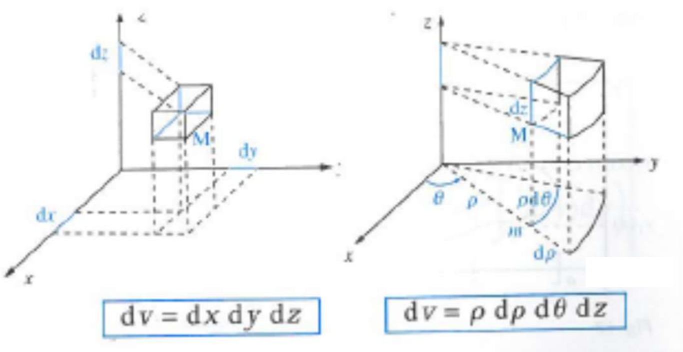
…………………………………………………………………………………………………...

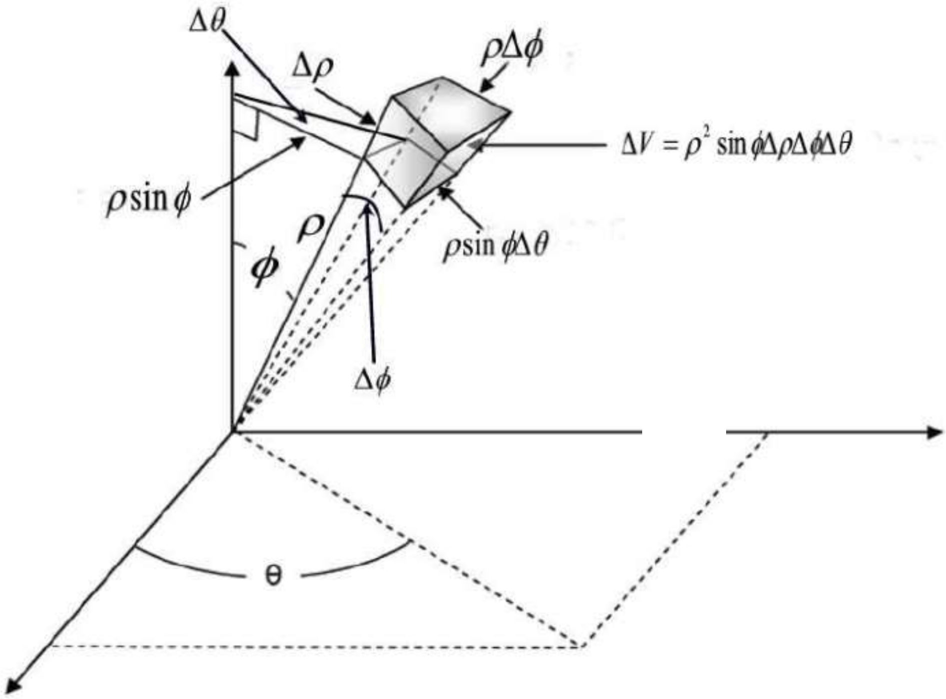
On obtient alors :

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_\Delta f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi$$

5) <u>Différentielle de volume</u>

Si on note V le volume, la différentielle de volume dV s'écrit :
- en coordonnées cartésiennes $dV = dxdydz$
- en coordonnées cylindriques $dV = \rho d\rho d\theta dz$
- en coordonnées sphériques $dV = r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$





5) Exercices

Exercice 1 Calculer V, le volume d'une sphère de rayon R.

Exercice 2 Soit un réel a>0.

Calculer : $I = \iiint_D \frac{dxdydz}{\left(x^2 + y^2 + a^2\right)^2}$ où $D = \left\{(x, y, z) \in IR^3 \,/\, x^2 + y^2 - ax \leq 0, 0 \leq z \leq a\right\}$

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...