ITII
Filière Electronique

Formation par Apprentissage
Promotion 2003/2005

Samedi 24 mai 2003

NOM du Candidat:

Prénom : **N° :**

Phase de Recrutement

Epreuve de Mathématiques

AVERTISSEMENT **: Cette épreuve a pour but d'évaluer le niveau atteint par chaque candidat, en tenant compte des différences existant entre les programmes des diverses formations dont ils sont issus.**

En particulier il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour obtenir la note maximale : certaines parties de programme spécifique à telle ou telle formation sont abordées tour à tour, l'ensemble étant équilibré.

La plupart des questions sont rédigées de façon à comporter des réponses de niveaux de difficulté croissants. Quelques réponses partielles mais correctes et cohérentes sont donc facilement accessibles dans de nombreux cas et peuvent contribuer à améliorer sensiblement la note finale.

Pour chacune des dix questions il est demandé une ou des réponses précises et concises, à inscrire dans le(s) cadre(s) prévu(s) à cet effet.

Question 1 Calculer :

$$\cos^6 x - \cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^4 x + \sin^6 x =$$

Exprimer $cos^2\, a$ et $sin^2\, a$ en fonction de $cos\, 2a$:

$cos^2\, a =$	$sin^2\, a =$

En déduire des réels $a,\ b,\ c,\ d$ tels que l'égalité ci-dessous soit valable pour tout réel x :

$$\cos^6 x - \sin^6 x = a + b \cdot \cos 2x + c \cdot \cos 4x + d \cdot \cos 6x$$

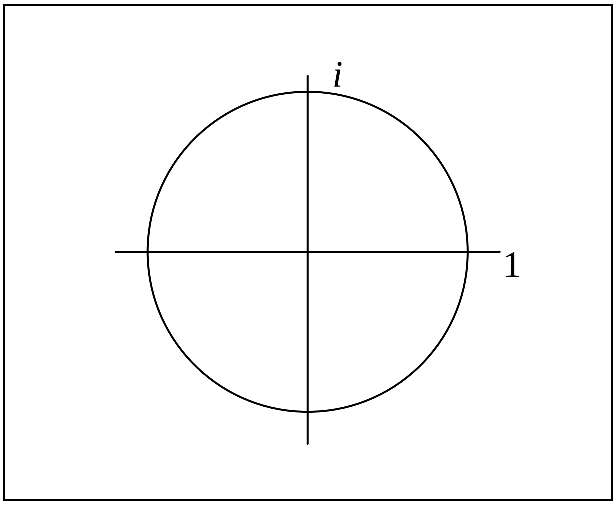
$a =$ $b =$ $c =$ $d =$

Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^6 x - \sin^6 x\right) dx =$$

Question 2 On considère le corps $\boldsymbol{C}$ des nombres complexes.

(a) Placer sur la figure ci-dessous les solutions de l'équation $z^3 = i$:



(b) Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = i$. Calculer les valeurs possibles de la fonction $f(z)$ ci dessous lorsque z parcourt S, puis calculer la somme de ces valeurs :

$$f(z) = \frac{1+z+z^2+z^3+z^4+z^5}{1-\bar{z}} \qquad (z \neq 1)$$

$$z \in S \Rightarrow f(z) =$$

$$\sum_{z \in S} f(z) =$$

(c) On considère l'équation : $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n - \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^n = i\sqrt{2}$, $(|z| \neq 0)$,

et on note S^* l'ensemble de ses solutions.

$$z \in S^* \Rightarrow \begin{cases} \textit{Le module de z est de la forme } \rho = \\ \\ \textit{L'argument de z est de la forme } \theta = \end{cases}$$

Pour $n=2$ tracer sur la figure ci dessus les éléments de S^* tels que $|z| \leq 1$.

Question 3 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=2\,\frac{\cos 2x + 2\,e^{2(1-\cos x)} - 3}{x^4} \quad , \quad (x \neq 0) \,.$$

Calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de chacune des fonctions suivantes :

$2\left(1-\cos x\right) \quad =$
$e^{2\left(1-\cos x\right)} \quad =$
$x^4 f(x) \quad =$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 :

$\lim_{x\to 0} f(x) =$

Question 4 La décomposition en fractions simples donne :

$\dfrac{13x^2}{x^4+5x^2-36} =$

On en déduit, pour $\mid t \mid > 2$, la primitive suivante :

$F(t) = \displaystyle\int_3^t \frac{13x^2}{x^4+5x^2-36}\,dx =$
$\displaystyle\lim_{t\to\infty} F(t) =$

Question 5 On considère l'équation différentielle $y'' - 6y' + 10\,y = f(t)$.

L'équation caractéristique associée est :

Pour $f(t)=0$ la solution générale est :

$y(t) =$

Pour $f(t) = 10\,t^2 - 2\,t + 6$ la solution telle que $y(0) = y'(0) = 0$ est :

$y(t) =$

Question 6 On considère l'équation différentielle :

$$(1+\cos 3t)\cdot y'(t) \; + \; 3\sin 3t \cdot y(t) \; = \; f(t)$$

Pour $f(t) = 0$ la solution générale est :

$y(t) =$

Pour $f(t) = \dfrac{1+\cos 3t}{2t^2+2t+1}$ la solution telle que $y(0) = \pi$ est :

$y(t) =$

Question 7 Soient $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par :

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_{n+1} = a_n \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \quad , \quad b_n = a_n \sin\frac{\pi}{2^n} \ .$$

Calculer :

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} =$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n =$	$\lim_{n\to\infty} a_n =$

Question 8 La transformée de Laplace de la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-3t}\,(t^3 + 3t^2 + 6t + 2\sin 3t) & (t \geq 0) \end{cases}$$

est :

$[L(f)](p) =$

La fonction *f(t)* dont la transformée de Laplace est :

$$[L(f)](p) = \frac{p+4}{p^2 - 4p + 13}$$

est définie par :

$f(t) =$

Question 9 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $B = A - I$.

Calculer :

$B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$	$B^2 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$	$B^3 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

En déduire des coefficients α_n et β_n tels que $A^n = I + \alpha_n \cdot B + \beta_n \cdot B^2$ pour tout $n \geq 1$:

$$A^n = I + \alpha_n \cdot B + \beta_n \cdot B^2 \qquad (n \geq 1)$$

$\alpha_n =$ $\qquad\qquad$ $\beta_n =$

puis des coefficients γ_n et δ_n tels que $A^n = I + \gamma_n \cdot B + \delta_n \cdot B^2$ pour tout $n \leq -1$:

$$A^n = I + \gamma_n \cdot B + \delta_n \cdot B^2 \qquad (n \leq -1)$$

$\gamma_n =$ $\qquad\qquad$ $\delta_n =$

Question 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 \\ -3 & 4 & -9 \\ -3 & 3 & -8 \end{pmatrix} \in R^{3\times 3}$

Le polynôme caractéristique de A est (sous forme factorisée) :

$p_A(\lambda) =$

A se décompose en $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale :

$P =$	$D =$
$P^{-1} =$	$A^{-1} =$