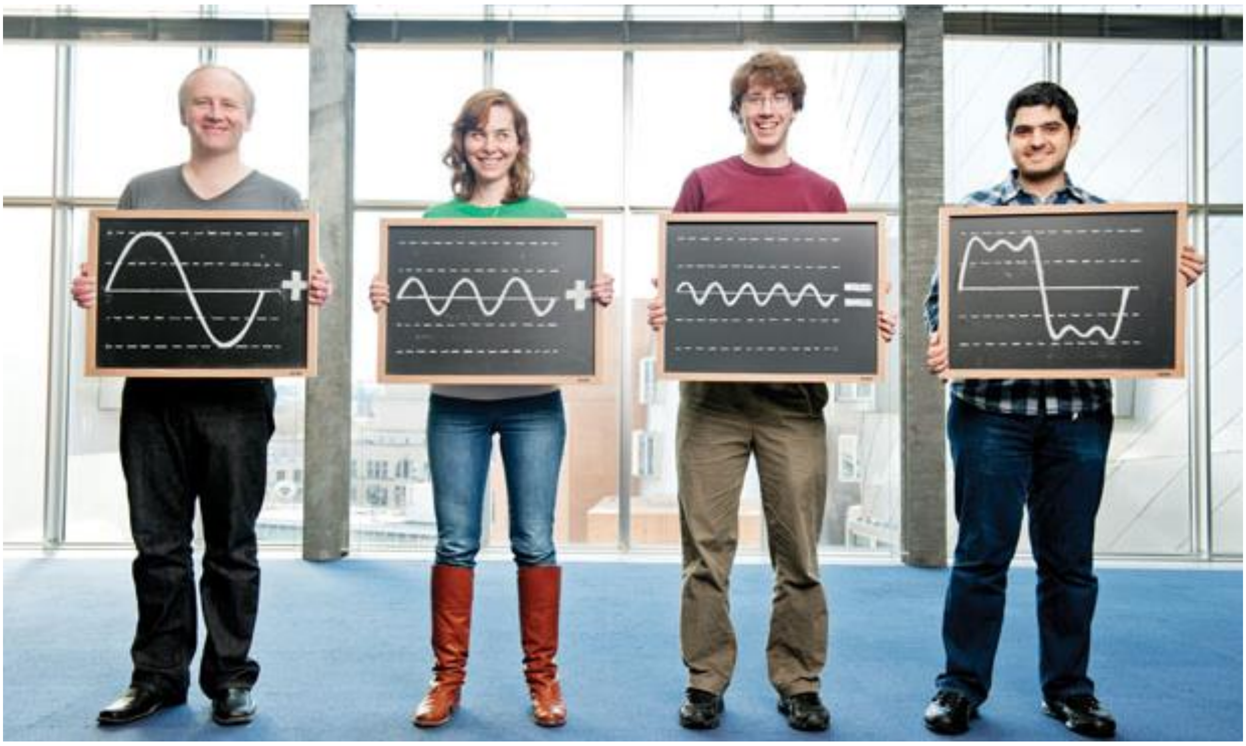
UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 1 : Série de Fourier



Enseignante : Sylvia Le Beux
Sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042
Moodle : https://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

Programme de Mathématiques (S3), d'Outils Logiciels (S3) et d'Outils Mathématiques (S4)

Chapitre I : Séries de Fourier (MA3)

Chapitre II : Transformation en Z (MA3)

-- DS1- MA3 --

Chapitre III : Produit de convolution, peigne de Dirac (MA3)

Chapitre IV : Transformation de Fourier (MA3)

-- DS2- MA3 --

Chapitre V : Calcul matriciel et diagonalisation d'une matrice (OL3)

-- DSTP - OL3 --

Chapitre VI : Fonctions à plusieurs variables - Intégrales multiples (OM4)

-- DS - OM4 --

Bibliographie

- Pour les étudiants souhaitant s'entraîner et progresser :

  Mathématiques en modules – Tome 2 - bases fondamentales DUT et BTS industriels
  auteur : C.Larcher - édition CASTELLA
  Magasin GEII
  Remarques : Résumé/rappel de cours de DUT et exercices appliqués au GEII corrigés.

  Maths BTS-DUT industriels - édition Techno + - auteurs C.Larcher
  Côte BU : 510 LAR
  Remarques : Résumé de cours et exercices très appliqués au GEII corrigés.

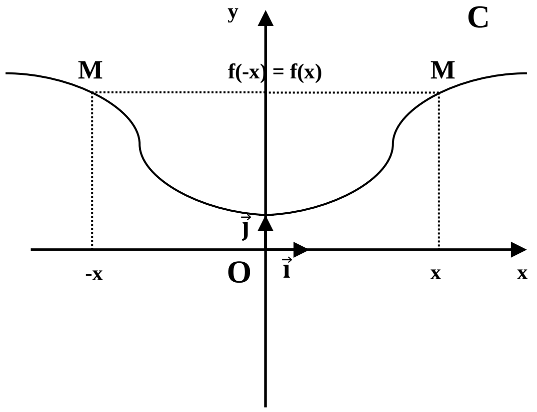
- Pour les étudiants souhaitant suivre de longues études :

  Cours DUT/BTS : édition : Ellipses – auteur : P. Variot
  Côte BU :510 VAR
  Remarques : Cours DUT d'un très bon niveau, tout le programme du DUT y est traité et plus.

  L'épreuve de mathématiques au concours ENSEA - édition : CASTELLA - auteurs : Lièvre - Mazoyer
  ISBN : 978 2 7135 2846 0 à la BU.
  Remarques : Résumé de cours très clair et sujets de concours corrigés intégralement.

<u>Prérequis 1</u> Parité et intégration.

1) <u>Intégrale d'une fonction paire sur un intervalle centré en 0</u>



Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de ℝ centré en 0, est dite paire lorsque :

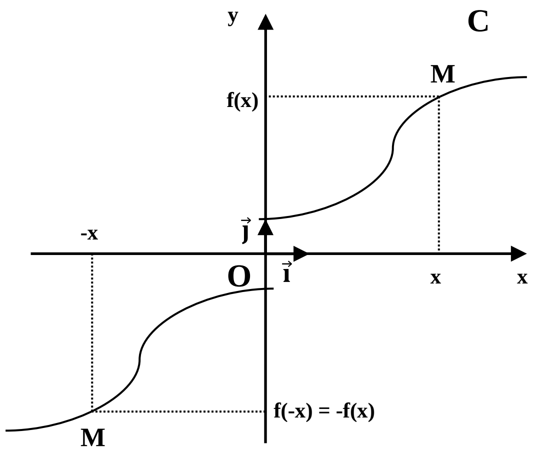
$$\forall x \in D \;\; f(-x) = f(x).$$

Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Soit f, une fonction paire et intégrable sur [-a,a].

On a alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_{0}^{a} f(x)dx$.

2) <u>Intégrale d'une fonction paire sur un intervalle centré en 0</u>



Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de ℝ centré en 0, est dite impaire lorsque :

$$\forall x \in D \;\; f(-x) = -f(x).$$

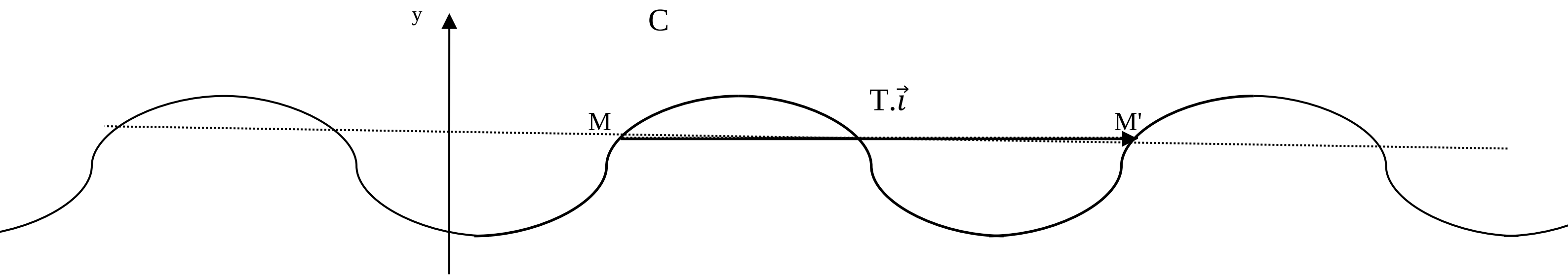
Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

Soit f, une fonction impaire et intégrable sur [-a,a]. On a alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

<u>Prérequis 2</u> : Périodicité et intégration

Une <u>fonction</u> f, définie sur D, un sous-ensemble de ℝ , est dite périodique lorsqu'il existe un nombre réel positif, T, le plus petit possible tel que :
$\forall x \in D \;\; f(x+T) = f(x)$. **On dit aussi que f est T-périodique.**

Soit f_0, la fonction définie par : $f_0(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [x_0, x_0 + T[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
f_0 est appelée le motif de la fonction f.
La représentation graphique de f est obtenue en appliquant sur la courbe représentant f_0, les translations de vecteur $kT.\vec{i}$ où k est un entier relatif.



Soit f, une fonction Soit f, une fonction T-périodique, intégrable sur tout intervalle de longueur T : [a,a+T]. On a alors :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

<u>Exemple</u> $\int_0^{2\pi} \cos^2(t).\sin^3(t)dt =$……………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

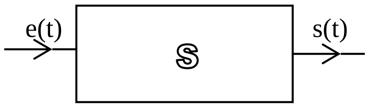
…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Introduction

Soit S un système électrique (RC, RLC…) schématisé ci-dessous par :



Dans un tel circuit, un signal d'entrée e(t) (tension) engendre un signal de sortie s(t), appelé aussi réponse du circuit au signal e(t). Lorsque le signal d'entrée est une fonction constante ou encore une fonction sinusoïdale, il est assez facile d'obtenir mathématiquement le signal de sortie. Que faire alors lorsque le signal d'entrée n'est pas sinusoïdal, mais, quand même périodique ?
C'est le baron Joseph Fourier (1768 – 1837), qui a eu l'idée de tenter d'écrire un signal périodique comme somme d'une constante et de fonctions sinusoïdales.
Dans ce chapitre nous allons déterminer à quelles conditions on peut écrire un signal T-périodique sous la forme : $\mathbf{e(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))}$ **où** $\mathbf{T=\frac{2\pi}{\omega}}$.

Lorsque c'est le cas, on dit que le signal e est décomposable en série de Fourier.

I. Séries trigonométriques

1) Définitions

On appelle série trigonométrique, toute somme infinie de sinusoïdes de la forme :
$\sum_{p=0}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$ **où $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ sont deux suites réelles, et ω un réel non nul.**

On appelle $S_n(t) = \sum_{p=0}^{n}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$ sa somme partielle de rang n.

Lorsque la suite $(S_n(t))_n$ converge pour une valeur de t donnée, on note sa limite S(t).

S est alors appelée la somme de la série, et est alors une fonction T-périodique, avec $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

En résumé, pour un réel t donné :

$$S(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)) = \lim_{n\to+\infty} S_n(t) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$$

- ✓ Remarque

$S_n(t)$ = ………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

3) Calcul des coefficients de la série de Fourier : a_0, a_p, b_p en fonction de S

Soit $S(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))\ \forall t$. (La série est convergente pour tout réel t)

S est alors T-périodique et $T = \frac{2\pi}{\omega}$. On suppose que S est intégrable sur l'intervalle de longueur T : $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$.

- ✓ Calcul de a_0 :

$\int_{-T/2}^{T/2} S(t)dt =$ ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

✓ Calcul de a_k : $k \geq 1$

$$\int_{-T/2}^{T/2} S(t).\cos(k\omega t)dt = \ldots$$

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………...

✓ <u>Calcul de b_k</u> : $k \geq 1$

$$\int_{-T/2}^{T/2} S(t).\sin(k\omega t)dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

✓ Conclusion

Soit $S(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)) \quad \forall t$.

Si S est intégrable sur l'intervalle de longueur T : $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$**, alors :** $a_0 = \frac{1}{T}.\int_{-T/2}^{T/2} S(t)dt$;

$a_p = \frac{2}{T}.\int_{-T/2}^{T/2} S(t).\cos(p\omega t)dt$; $b_p = \frac{2}{T}.\int_{-T/2}^{T/2} S(t).\sin(p\omega t)dt$.

II. Développement d'une fonction périodique en série de Fourier

1) Définition

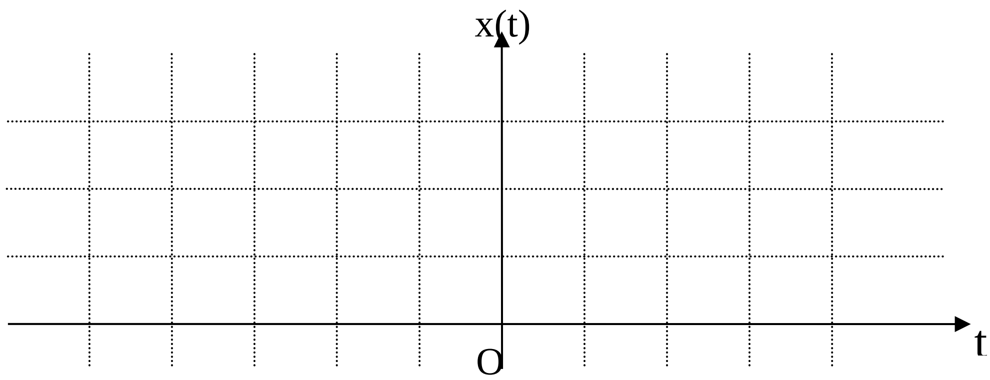
Soit x une fonction de période T, intégrable sur tout intervalle $[t_0,t_0+T]$**.**
On appelle série de Fourier de x la série trigonométrique :

$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$**, où les suites réelles** $(a_p)_p$ **et** $(b_p)_p$ **sont définies de la façon suivante :**

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt$; $a_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t).dt$; $b_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t).dt$ **pour** $p \geq 1$**,**

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

✓ Exemple Soit x, la fonction 2-périodique, définie par : $x(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \in [0;1[\\ 0 \text{ pour } t \in [1;2[\end{cases}$



……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

2) Cas particulier : parité de x.

- ✓ Si x est paire alors les fonctions qui à t associent x(t).cos(p ωt) et x(t).sin(p ωt) sont respectivement paires et impaires. On calcule alors les coefficients de Fourier en intégrant sur $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$, et on obtient :

a_0 = ……………………………………………………………………………………...

a_p = ……………………………………………………………………………………...

b_p = ……………………………………………………………………………………...

- ✓ Si x est impaire alors les fonctions qui à t associent x(t).cos(p ωt) et x(t).sin(p ωt) sont respectivement impaires et paires. On calcule alors les coefficients de Fourier en intégrant sur $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$, et on obtient :

a_0 = ……………………………………………………………………………………...

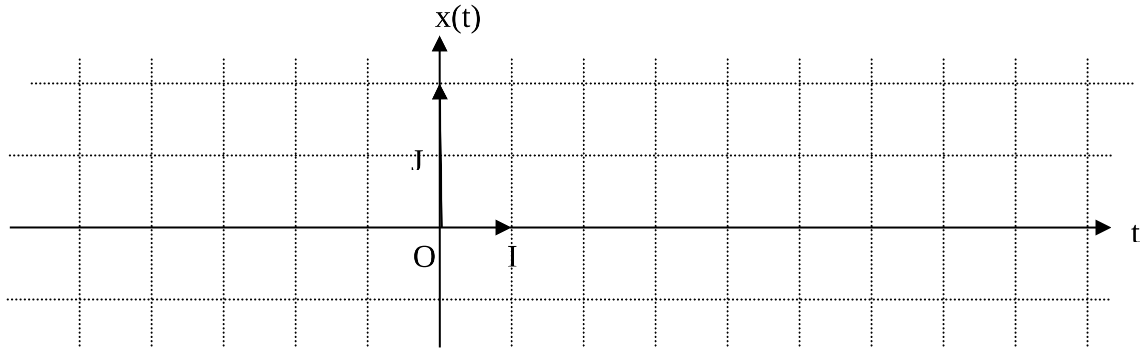
a_p = ……………………………………………………………………………………...

b_p = ……………………………………………………………………………………...

La série de Fourier d'un signal paire est donc en cosinus : $\mathbf{a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p.\cos(p\omega t)}$

La série de Fourier d'un signal impaire est donc en sinus : $\mathbf{\sum_{p=1}^{+\infty} b_p.\sin(p\omega t)}$

- ✓ Exemple Soit x, la fonction de période 2π, définie par : $x(t)=\begin{cases}1\,\text{pour } t\in[0;\pi[\\ -1\,\text{pour } t\in[\pi;2\pi[\end{cases}$



……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

3) Spectre du signal x

✓ Définition

C'est le diagramme en bâtons représentant en ordonnée $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et en abscisse n.

✓ Exemple du paragraphe II.2)

4) Théorème de Dirichlet et définition d'une fonction développable en série de Fourier

Soit x un signal de période T, intégrable sur tout intervalle [α, α+T].

- Si x est continue sur [α, α+T[, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et à droite.
- x est dérivable sur [α, α+T[, sauf éventuellement en un nombre fini de points où sa dérivée admet une limite finie à gauche et à droite.

Alors la série de Fourier de x converge en tout point t et sa fonction somme est alors :

$$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)) = \begin{cases} x(t) \text{ pour t où x est continue} \\ \dfrac{x(t_+) + x(t_-)}{2} \text{ pour t où x est discontinue} \end{cases}$$

On dit alors que <u>x est développable en série de Fourier.</u>

✓ Vocabulaire Toute fonction vérifiant les hypothèses du théorème de Dirichlet sont dites de classe C^1 par morceaux sur l'ensemble des réels.

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

- ✓ Exemple Appliquer le théorème de Dirichlet à l'exemple du paragraphe II.2)

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

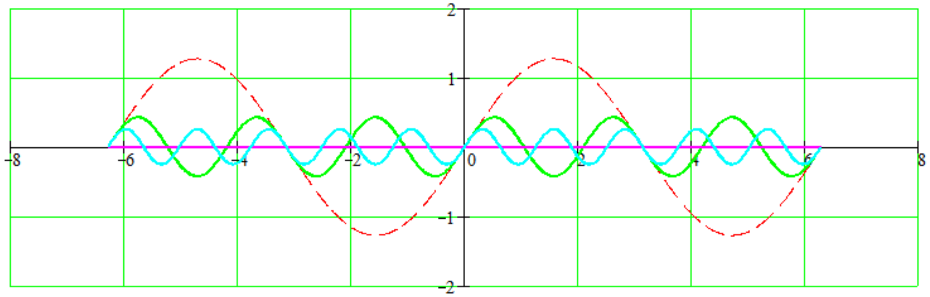
……………………………………………………………………………………………..

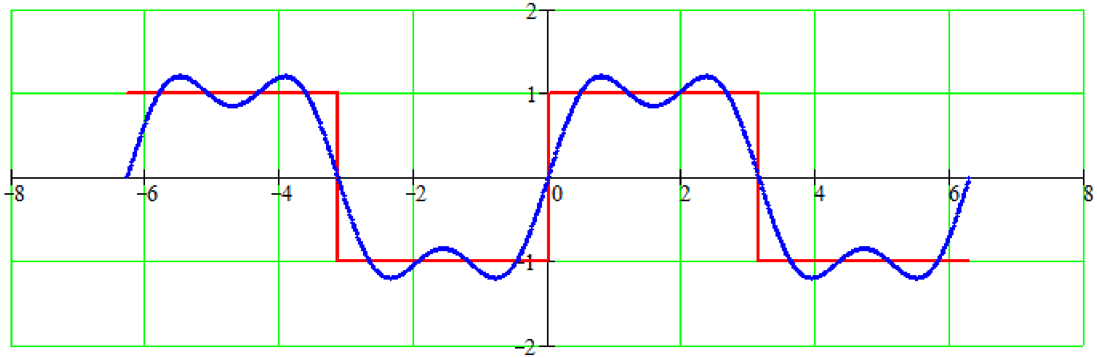
……………………………………………………………………………………………..

Exercice Déduire de l'exemple précédent la valeur de la série numérique : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

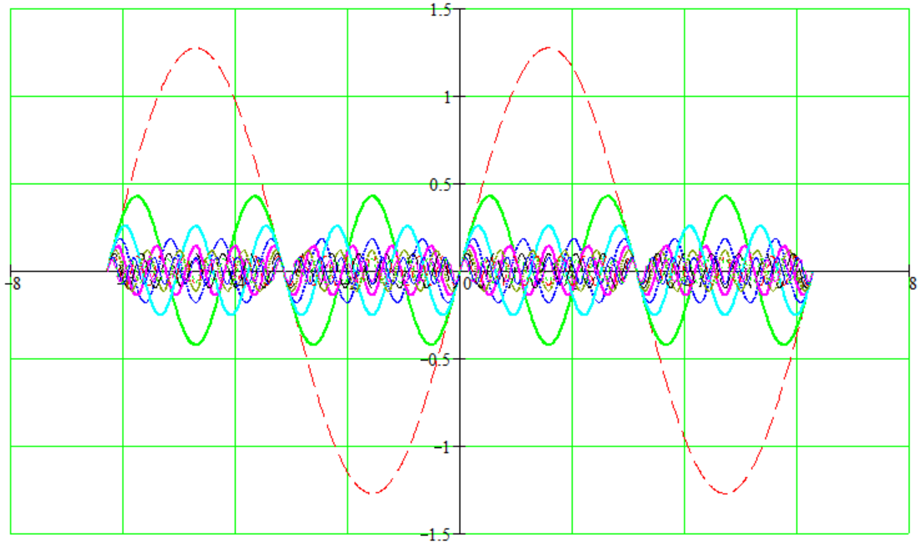
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..

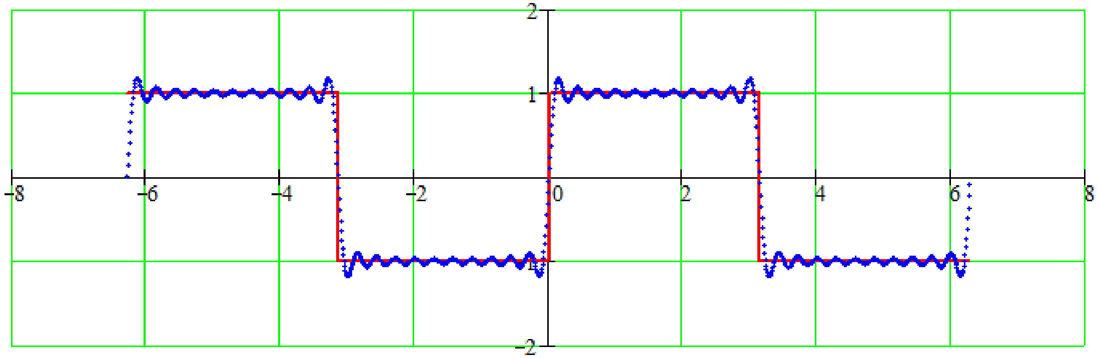
<u>Illustration de l'exemple</u> II.2)





Au-dessus : Harmoniques de rang 0 (valeur moyenne), de rang 1 (fondamental) jusqu'au rang 3.
A droite : somme des harmoniques de rang de 0 à 3 et signal x.

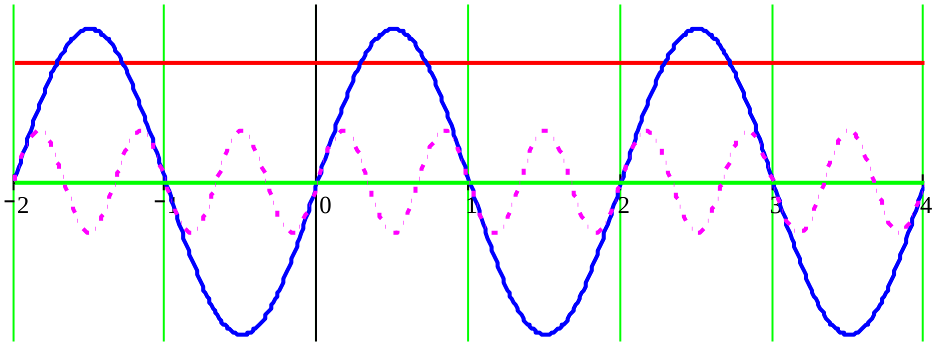


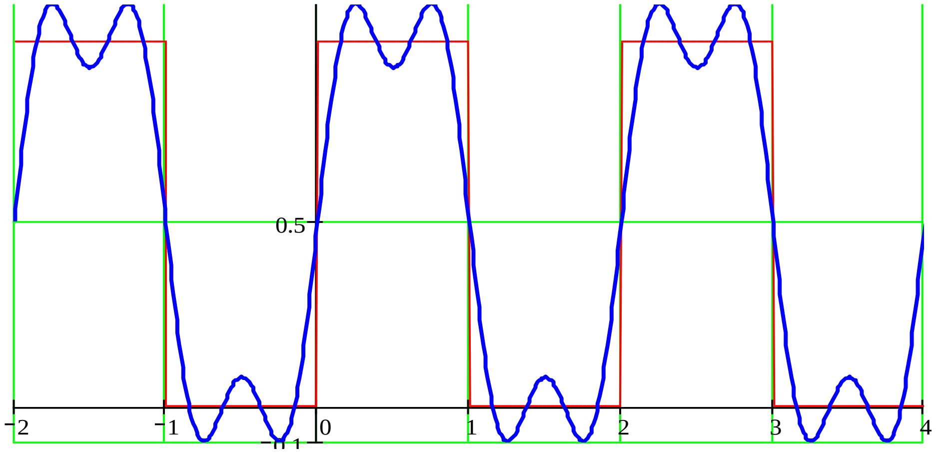


A droite : somme des harmoniques de rang 0 à 21 et signal x.

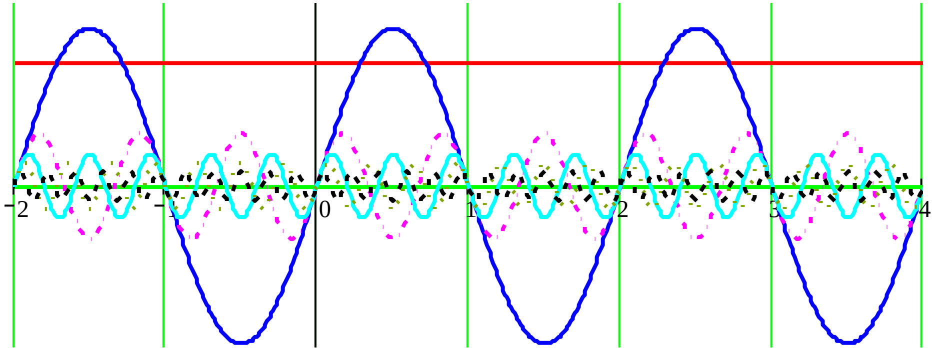
Au-dessus : Harmoniques de rang 0 jusqu'au rang 21.

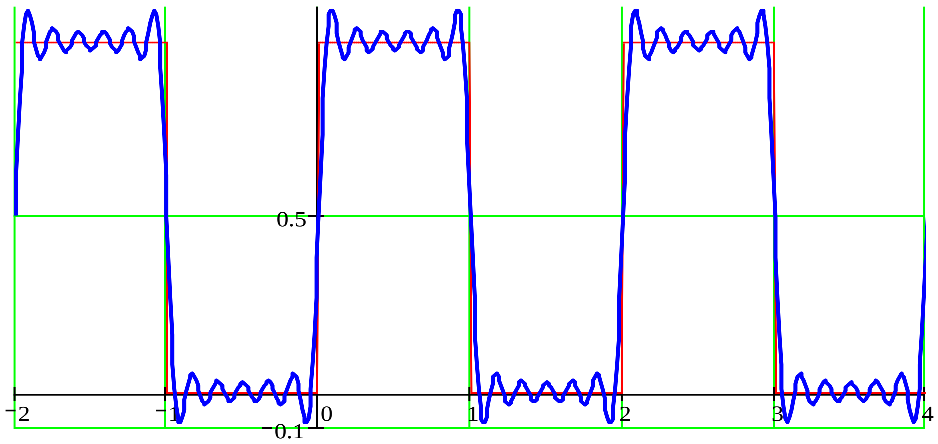
<u>Illustration de l'exemple</u> II.1)





Au-dessus : Harmoniques de rang 0 (valeur moyenne), de rang 1 (fondamental) jusqu'au rang 3.
A droite : somme des harmoniques de rang de 0 à 3 et signal x.





Au-dessus : Harmoniques de rang 0 jusqu'au rang 21.
A droite : somme des harmoniques de rang 0 à 21 et signal x.

III. Identité de Parseval

1) Formule de Bessel-Parseval

Soit x une fonction T-périodique ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) développable en série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{p\geq 0} (a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$$

On a alors la formule suivante : $\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt = a_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}$

2) Interprétation physique

La formule de Parseval donne une relation entre les coefficients de Fourier d'une fonction x et le carré de sa valeur efficace.

$(x_{eff})^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt$ est l'énergie du signal x, et $E(U_n) = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ l'énergie de l'harmonique de rang n : $U_n(t) = a_n.\cos(n\omega t) + b_n.\sin(n\omega t)$.

La formule de Bessel-Parseval peut aussi s'interpréter en termes d'énergie :

$$E(x) = x_{moy}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E(u_n)$$

Exemple

Appliquer le théorème de Parseval à l'exemple II.2), puis en déduire la valeur de la série : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

IV. Ecriture complexe d'une série de Fourier

1) Coefficient de Fourier complexe

Le terme général d'une série de Fourier est : $U_p(t) = a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$.
En utilisant les formules d'Euler, on montre que U_p peut s'écrire sous la forme :
$U_p(t) = c_p e^{ip\omega t} + \overline{c_p} e^{-ip\omega t}$, en effet :

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

On a alors : $c_p = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-ip\omega t}dt$ et $c_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt$ car :

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

De plus, $\overline{c_p} = c_{-p}$, car :

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

On a alors : $a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)) =$ ....

Soit : ....

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

2) Définition

On appelle série de Fourier complexe d'un signal x, T-périodique la série : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}$

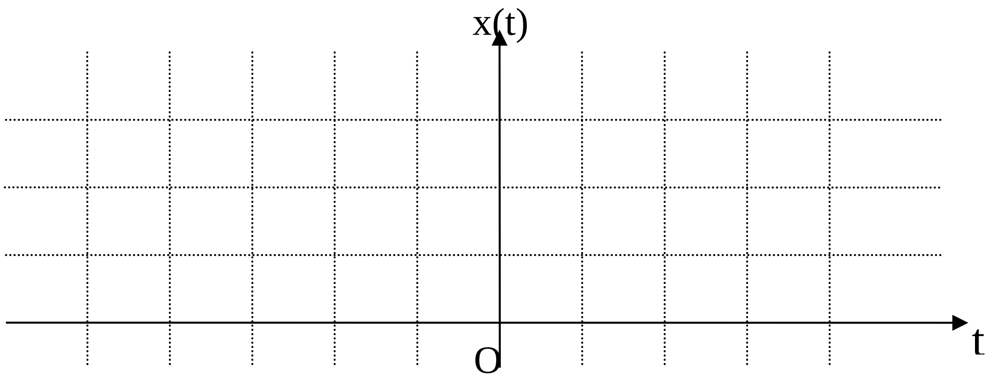
où : $c_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-ik\omega t}dt$ **pour** $k \neq 0$ **et** $c_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt$ **avec** $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On a alors les correspondances suivantes : $c_0 = a_0$ **et** $c_k = \frac{a_k - i.b_k}{2}$ **pour** $k \neq 0$.

Théorème de Parseval : $\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

✓ <u>Exemple</u> Soit x, la fonction 2π-périodique définie par : $x(t) = \dfrac{t}{2\pi}$ sur $[0,2\pi[$.

Représentons x sur $[-3\pi,3\pi]$:



Déterminer ses coefficients de Fourier complexes, sa série de Fourier ; appliquer le théorème de Dirichlet. Quelle est alors la série de Fourier réelle de x ?

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

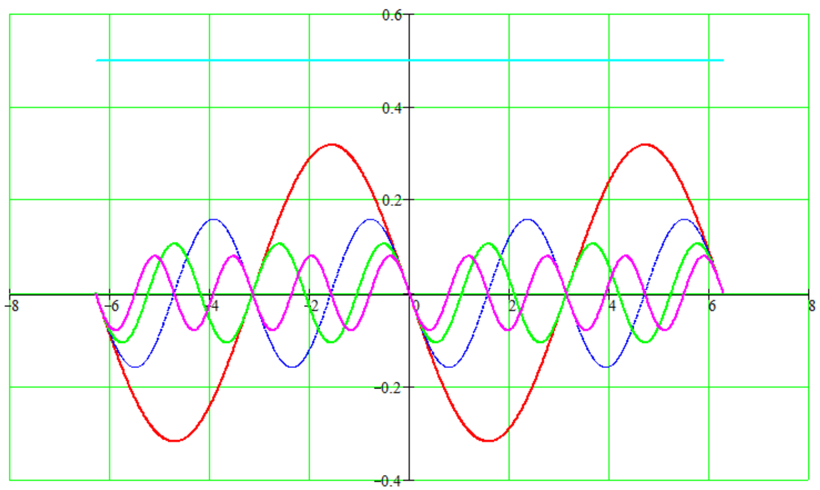
…………………………………………………………………………………………...

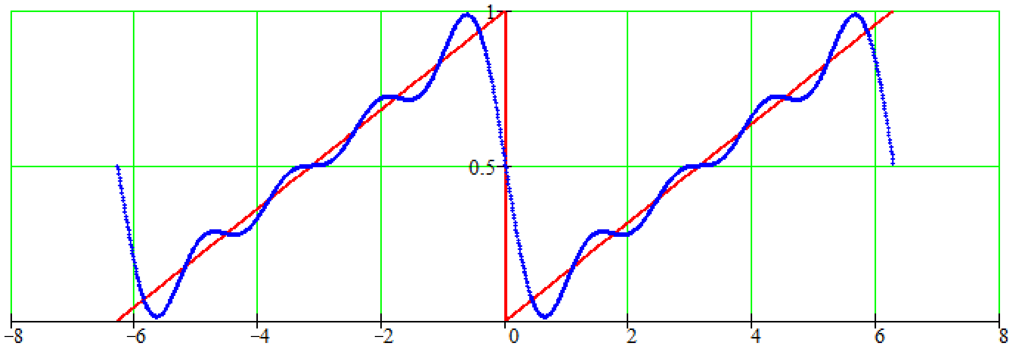
…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

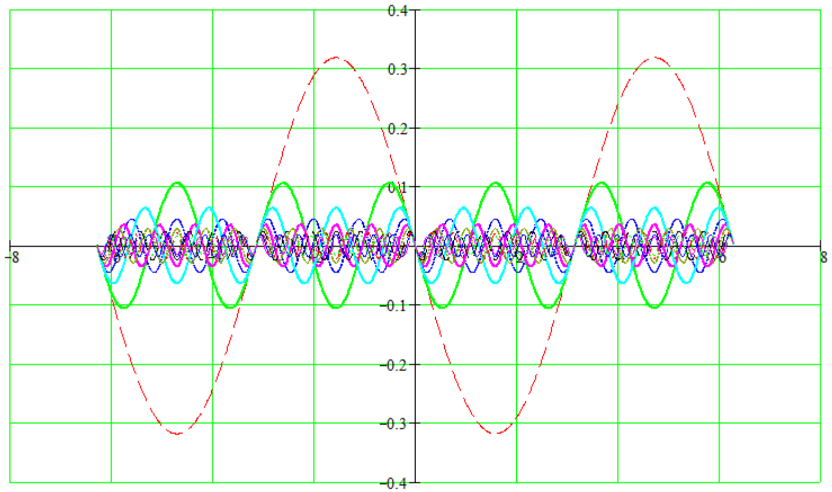
………………………………………………………………………………………..

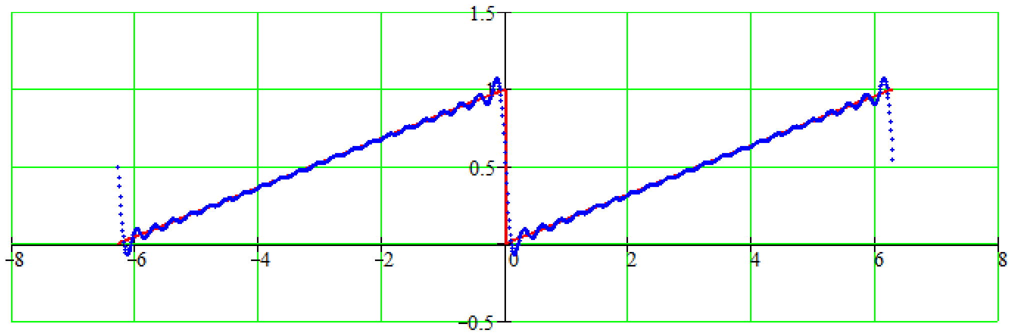
<u>Illustration de l'exemple</u> IV.2)





Au-dessus à gauche : Harmoniques de rang 0 à 4.
à droite : somme des harmoniques de rang de 0 à 4 et signal x.





Au-dessus à gauche : Harmoniques de rang 1 à 21.
à droite : somme des harmoniques de rang 0 à 21 et signal x.

V. Analyse harmonique d'un signal

1) harmonique d'ordre n ou de rang n

On appelle harmonique d'ordre n d'un signal décomposable en série de Fourier, le terme : $a_n.\cos(n\omega t)+b_n.\sin(n\omega t)$. L'harmonique d'ordre 1 est appelé le fondamental (a_0 est la valeur moyenne du signal)

2) Autre écriture d'une série de Fourier

Le terme général $a_n.\cos(n\omega t)+b_n.\sin(n\omega t)$ peut aussi s'écrire $A_n\cos(n\omega t+\varphi_n)$ où :

$$A_n=|a_n-ib_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=2|c_n| \quad \text{et} \quad \varphi_n=\arg(a_n-ib_n)=\arg(c_n).\ (n\neq 0)$$

A_n est l'amplitude de l'harmonique de rang n

φ_n est la phase l'harmonique de rang n.

Une autre écriture du développement en série de Fourier d'un signal périodique f est donc :

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega t+\varphi_n)\text{, avec } A_0=a_0.$$

L'ensemble des amplitudes A_n forme le spectre d'amplitude unilatéral du signal x. Il est représenté par un diagramme en bâtons obtenu en représentant les amplitudes A_n en fonction de n/T. A_n devient négligeable à partir d'un certain rang.

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

VI. Exercices sur le chapitre 1

Exercice 1 :

Soit x, la fonction de période 2π, définie par : $x(t) = |t|$, pour $t \in [-\pi, \pi[$.

1) Dessiner le graphe de x,
2) Calculer les coefficients de Fourier de x,
3) Montrer que la série de Fourier de x peut s'écrire : $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{\cos(2p+1)t}{(2p+1)^2}$
4) En utilisant le théorème de Dirichlet, montrer que la série de Fourier de x est convergente pour toute valeur de t, quelle est alors sa somme ?
5) En déduire la valeur de la série : $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$.
6) En appliquant le théorème de Parseval, en déduire la valeur de la série : $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$

Exercice 2 :

Soit x, la fonction de période T, impaire, et valant 1 si 0<t<T/2.

1) Représenter x.
2) Ecrire la série de Fourier de x.
3) Appliquer le théorème de Dirichlet afin de déterminer la nature de cette série.
4) En déduire la valeur des séries : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$

Exercice 3

1) Déterminer la série de Fourier associée à la fonction 2π-périodique définie sur $[0\ ,\ 2\pi[$ par : $f(x) = e^{\alpha x}$ $\alpha \neq j.n$ où n est un entier naturel.
2) En déduire la valeur de la série : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2+n^2}$

Exercice 4

Soit f une fonction 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = \sin x$ si $x \in [0, \pi[$ et $f(x) = 0$ si $x \in [\pi, 2\pi[$

1°. Tracer rapidement la courbe représentative de f
2°. Déterminer les coefficients de Fourier de f
3°. En déduire l'expression de la série de Fourier.
4°. La fonction f vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Dirichlet ?
5°. Appliquer ce théorème pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$
6°. Idem pour $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$
7°. Appliquer le théorème de Parseval à f

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

Exercice extrait d'un concours d'entrée en école d'ingénieurs

3 - Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2-périodique, telle que $f(t) = \mathrm{ch}(t)$ pour $-1 \le t \le 1$.

a - Tracer le graphe de f sur [-3,3] . Préciser l'ensemble des t de $\mathbb{R}$ où $f'(t)$ existe, et celui des t de $\mathbb{R}$ où $f''(t)$ existe..

b - Calculer les coefficients de Fourier de f .

c - Ecrire le développement en série de Fourier $S(f)$ de f , et préciser l'ensemble des t de $\mathbb{R}$ tels que $f(t) = S(f)(t)$.

d - Déduire de ce qui précède le développement en série de Fourier $S(g)(t)$ de la fonction g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2-périodique, telle que $g(t) = \mathrm{sh}(t)$ pour $-1 \le t < 1$. Préciser l'ensemble des t tels que $g(t) = S(g)(t)$, et tracer le graphe de $g(t)$ sur [-3,3] .

e - Calculer les sommes des séries numériques suivantes :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{1+\pi^2\nu^2} \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1+\pi^2\nu^2} \quad , \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(2\nu+1)\pi}{1+(2\nu+1)^2\pi^2} \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\pi^2\nu^2)^2}$$

Banque d'épreuve DUT-BTS – Concours 2000.

Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $]0,2\pi[$ par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ et $f(0) = 0$.

On note $S(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ la série de Fourier de f, et

$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ la somme partielle de Fourier d'ordre n.

On s'intéresse ensuite à la résolution sur $[0,2\pi]$ de l'équation différentielle :
(Eq) $\quad y'(x) + y(x) = f(x)$ avec $y(0) = y(2\pi)$
On notera A_k et B_k les coefficients de Fourier de la solution $y(x)$.

Question 12

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

(A) On a pour tout $k \ge 0$, $a_k = 0$

(B) On a pour tout $k \ge 1$, $b_k = \dfrac{1}{2k+1}$

(C) On a $\dfrac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k+1}$

(D) On a pour tout $n \geq 1$ et tout x tel que $0 < x < 2\pi$, $\sum_{k=1}^{k=n} \cos(kx) = \dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] - \sin\left[\frac{x}{2}\right]}{2\sin\left[\frac{x}{2}\right]}$

(E) Les maxima de $S_n(x)$ sont tels que $\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] = \sin\left[\frac{x}{2}\right]$

Question 13

(Seulement pour les candidats des options génie électrique et génie civil)

(A) On a obligatoirement $A_0 = 0$

(B) Pour $k > 0$, l'intégration par parties donne $A_k + k\, B_k = 0$ et $k\, A_k + B_k = \dfrac{1}{k}$

(C) La solution de *(Eq)* s'écrit $y = A\, e^{-x} + \dfrac{\pi - x}{2}$

(D) On a $B_k = \dfrac{1}{k(k^2+1)}$

(E) On a $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+1} = \dfrac{1-\pi}{2} + \dfrac{\pi}{1-e^{-2\pi}}$