Mathématiques

Programme de l'année
Quelques prérequis de base

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.f

<table>
<tr><td rowspan="2">SEMESTRE 5</td><td></td><td>Volume horaire

54 H</td><td>Evaluations
1 DS de 2h00 (coeff (2/6)
Bonus : QCM / TravailMaison
1 Partiel de 4h00 (coeff 4/6)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Prérequis de base en mathématiques : nombres complexes, calcul intégral, équations différentielles linéaires, équivalents (et développements limités), décomposition d'une fraction en somme d'éléments simples.

Chap.1 : Transformation de Laplace

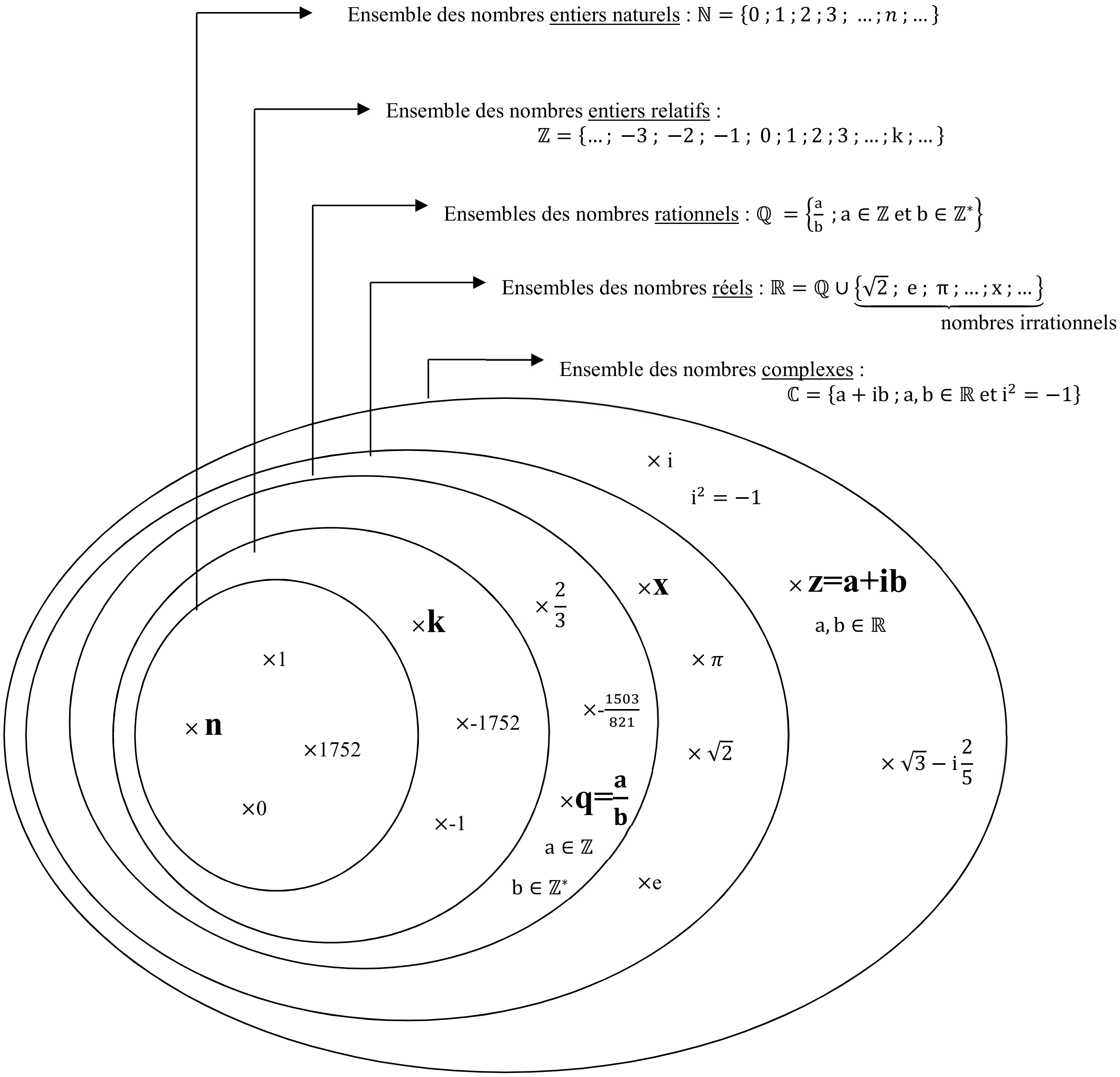
Chap.2 : Séries et transformation de Fourier (avec rappels sur le produit de convolution)

Chap.3 : Séries entières et transformation en Z.

Chap.4 : Algèbre linéaire
Rappels sur le calcul matriciel et résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss. Diagonalisation d'une matrice pour la résolution de système d'équations différentielles.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">SEMESTRE 6</td><td></td><td>Volume horaire

20 H</td><td>Evaluations</td></tr>
<tr><td colspan="3">Chap.5 : Probabilités et statistiques</td></tr>
</table>

Quelques ensembles de nombres importants



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Ensemble des entiers naturels pairs : $\{0\,;2\,;4\,;6\,;\dots;2n \text{ où } n \in \mathbb{N}\,;\dots\}$

Ensemble des entiers naturels impairs : $\{1\,;3\,;5\,;7\,;\dots;2n+1 \text{ où } n \in \mathbb{N}\,;\dots\}$

Ensemble des entiers relatifs pairs : $\{\dots;\ -6\,;-4\,;\ -2\,;\ 0\,;2\,;4\,;6\,;\dots;2k \text{ où } k \in \mathbb{Z}\,;\dots\}$

Ensemble des entiers relatifs impairs : $\{\dots;\ -5\,;-3\,;\ -1\,;\ 1\,;3\,;5\,;7\,;\dots;2k+1 \text{ où } k \in \mathbb{Z}\,;\dots\}$

Rappels de calculs de base

$\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}} = a^n$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ $a \neq 0$	$a^0 = 1$	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$(a^m)^n = a^{m\times n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a \neq 0$	$(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $b \neq 0$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $b \neq 0$ et $d \neq 0$	$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ $b \neq 0$ et $a \neq 0$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$ $b \neq 0$ et $d \neq 0$	$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$ $b \neq 0$, $c \neq 0$	$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ $a \neq 0$	$ax + b \leq 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{b}{a} \text{si } a > 0 \\ x \geq -\frac{b}{a} \text{si } a < 0 \end{cases}$
Soit $x \geq 0$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	Soit $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x}\sqrt{x} = x$	Soit $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$	Soit $a \leq 0$, $\sqrt{a^2} = -a$
$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a \leq 0 \end{cases} = \|a\|$	Soit a>0, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$	$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{x}.\sqrt{y} + y$ $x \geq 0$, $y \geq 0$	$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}.\sqrt{y} + y$ Si $x \geq 0$, $y \geq 0$
$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x-y$ $x \geq 0$, $y \geq 0$	$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$ $x \geq 0$, $y \geq 0$, $(x,y) \neq (0,0)$	$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ $a \geq 0$, $b \geq 0$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $a \geq 0$, b>0
Soit x, un nombre positif et n un entier naturel non nul, la racine nième de x, notée $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ est le nombre réel positif y tel que $y^n = x$			
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$	$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$	$a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$ ($i^2 = -1$)
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$		$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$	

<u>Factorisation et signe de</u> $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$: on résout $P(x) = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, *P possède deux racines réelles* : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est la factorisation de P. "P(x) est du signe de -a entre les racines ".
- Si $\Delta = 0$, P possède une racine réelle double : $x_1 = \frac{-b}{2a}$, alors $P(x) = a(x - x_1)^2$ est la factorisation de P. P(x) est du signe de a.
- Si $\Delta < 0$, *P possède deux racines complexes conjuguées* : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, alors $P(x) = a(x - z_1)(x - z_2)$ est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$. P est du signe de a.

<u>Remarque</u> : Soit $P(x) = x^2 - s.x + p$. x_1 et x_2, les racines de P vérifient alors le système suivant : $\begin{cases} s = x_1 + x_2 \\ p = x_1 \times x_2 \end{cases}$

<u>Factoriel d'un entier naturel</u> Soit n, un entier naturel non nul, on appelle factoriel de n et on note n!, le produit des n premiers entiers naturels : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ Par convention 0! = 1.
Exemple : 1! = 1 ; 2! = 2 ; 3! = 6 ; 4!=24 ; 5! = 120 etc...
On remarque que 4! = 4 × 3! ou encore que 5! = 5 × 4! , plus généralement : $n! = n \times (n-1)!$

Proportionnalité Deux grandeurs X et Y non nulles sont proportionnelles, lorsqu'il existe un réel k non nul tel que :

Valeurs de X	Valeurs de Y
x_1	y_1
x_2	y_2
...	...
x_n	y_n

$\times$ k

$$\left.\begin{matrix} y_1 = k.x_1 \\ y_2 = k.x_2 \\ \dots \\ y_n = k.x_n \end{matrix}\right\}$$ se note aussi $\forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}\; y_i = k.x_i$

On a donc aussi : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \dots = \frac{y_n}{x_n} = k$

Ou encore : $x_1y_2 = x_2y_1$ etc...

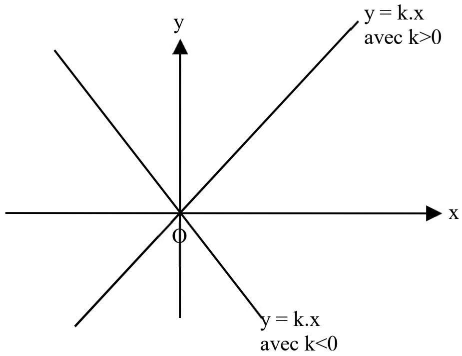
En pratique, sachant que X et Y sont deux grandeurs proportionnelles, ne connaissant pas k, le coefficient de proportionnalité,

On obtient x en résolvant l'équation :

$$x_1y = xy_1 \Leftrightarrow x = \frac{x_1y}{y_1}$$

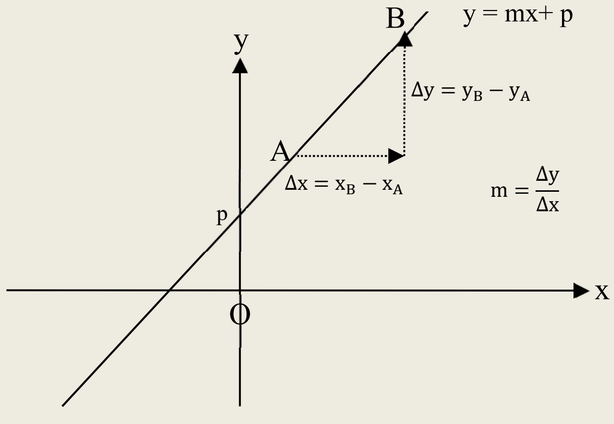
Valeurs de X	Valeurs de Y
x_1	y_1
x inconnu	y connu
...	...

$\times$?



La fonction f, définie par : f(x) = k.x est appelée **fonction linéaire**. Sa représentation graphique est la droite passant par O, l'origine du repère et ayant pour coefficient directeur (pente) k.

Equation (réduite) de la droite (AB) y = m.x + p où m est le coefficient directeur (la pente) de (AB) et p est l'ordonnée à l'origine.



Calcul de la pente m :

Si on connaît les coordonnées de A et B : m = $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$(A$\neq$ B)

Calcul de l'ordonnée à l'origine p :

Si on connaît le point Q, intersection de (AB) et de l'axe des ordonnées, on en déduit facilement $p = y_Q$,

sinon, on résout l'équation : $y_A = m.x_A + p$ (en effet, A$\in$ (AB)), et on obtient : $p = y_A - m.x_A$

Remarques : - Δy et Δx sont proportionnels, puisque $\Delta y = m.\Delta x$

- La fonction f, définie par : f(x) = m.x +p est appelée **fonction affine**. Sa représentation graphique est la droite passant par le point (0 ; p), et ayant pour coefficient directeur (pente) m.

Implication et équivalence par l'exemple

Implication : $x = 3 \Longrightarrow x^2 = 9$, mais la réciproque est fausse : $x = 3 \nLeftarrow x^2 = 9$

Equivalence : $x = 3$ ou $-3 \Longrightarrow x^2 = 9$, et la réciproque est vraie : $x = 3$ ou $-3 \Leftarrow x^2 = 9$.

On écrit alors : $x = 3$ ou $-3 \Leftrightarrow x^2 = 9$ ou encore : $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou -3 qui est une équivalence.

Définitions de base

Dans un repère orthonormé (O ;$\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$), on appelle **cercle trigonométrique** le cercle **orienté de centre O et de rayon 1**. Sur ce cercle, on définit une **origine I** et deux sens : le **sens direct** (ou positif), est le **sens inverse des aiguilles d'une montre** ; et le sens indirect (ou négatif), est le sens des aiguilles d'une montre.

La longueur d'un cercle de rayon R est : $L = 2\pi R$, la longueur du cercle trigonométrique est donc 2π.

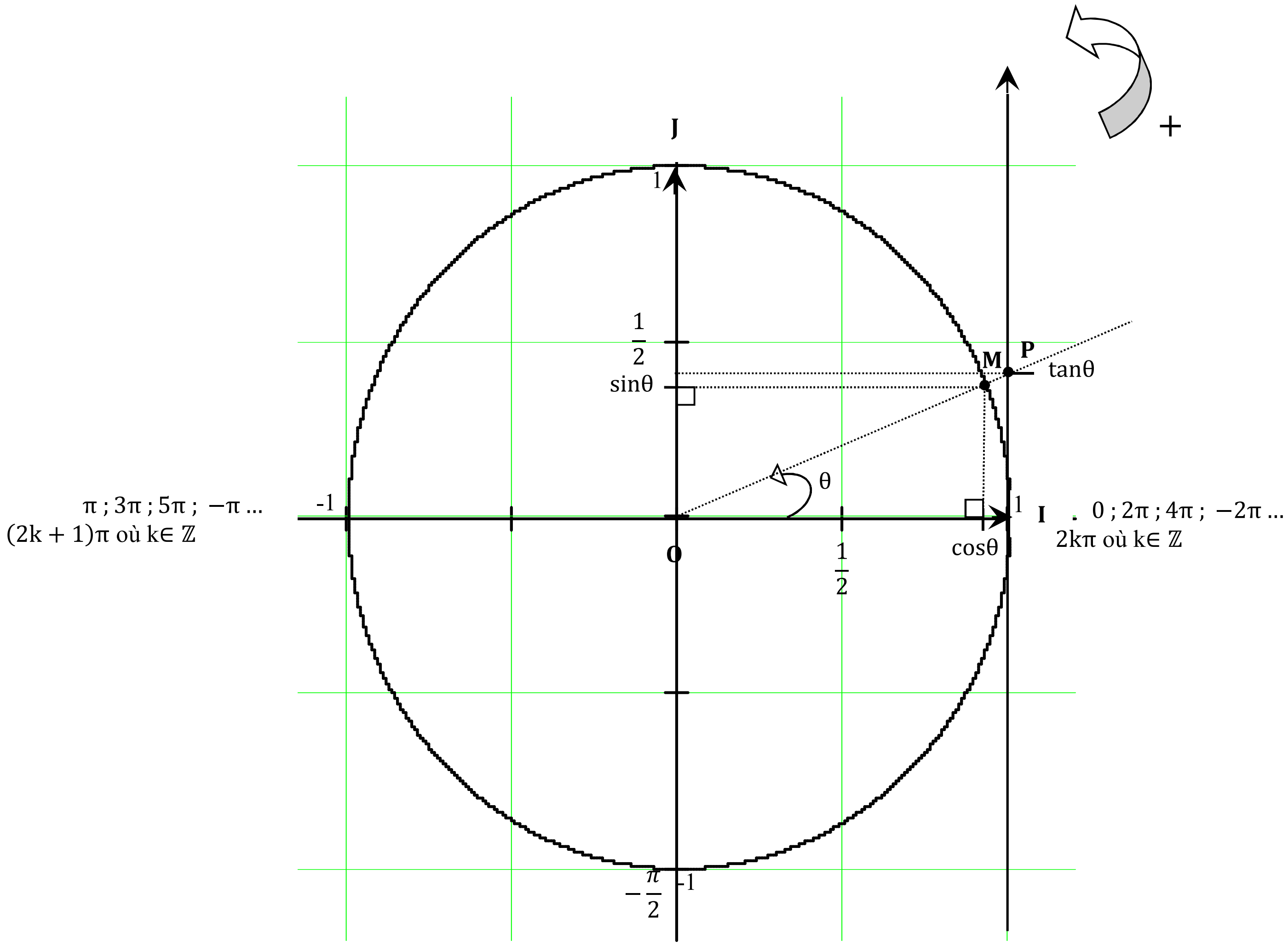
Soit M, un point sur le cercle trigonométrique. On note **$\boldsymbol{\theta}$ une mesure en radians de l'angle orienté$\left(\overrightarrow{\mathbf{OI}}, \overrightarrow{\mathbf{OM}}\right)$**
$\boldsymbol{\theta + 2k\pi}$où $\mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}\mathbb{Z}$, sont donc aussi des mesures de ce dernier, on les appelle encore **$\boldsymbol{\theta}$ modulo $\boldsymbol{2\pi}$**

On appelle **mesure principale** de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ l'unique mesure appartenant à l'intervalle $\left]\boldsymbol{-\pi, \pi}\right]$

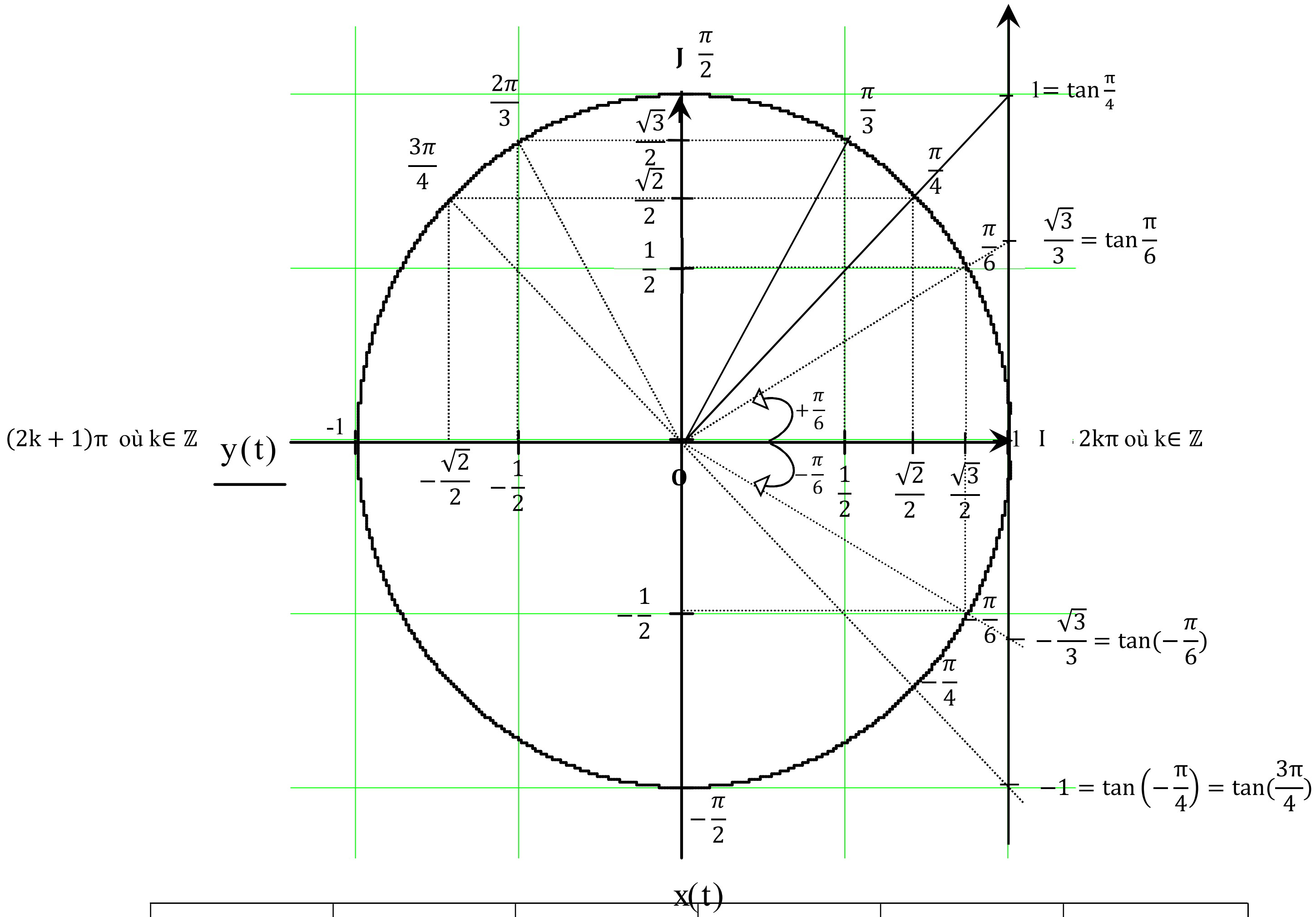
On appelle **cosinus** de l'angle orienté θ, **l'abscisse du point M** dans le repère (O ;$\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$)
On appelle **sinus** de l'angle orienté θ, **l'ordonnée du point M** dans le repère (O ;$\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$)
On obtient donc : $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{cos\theta}.\overrightarrow{\mathbf{OI}} + \mathbf{sin\theta}.\overrightarrow{\mathbf{OJ}}$

Soit Δ**, la droite parallèle à l'axe des ordonnées, passant par le point I**. Soit P, le point d'intersection des droites (OM) et Δ.
On appelle **tangente** de l'angle orienté θ, et on note $\tan(\theta)$, **l'ordonnée du point P** dans le repère (O ;$\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$). On reportera cette dernière sur la droite Δ.

<u>Remarque</u> : $\frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} =$ **$\boldsymbol{\tan\theta}$ est la pente de la droite (OM)** qui a donc pour équation : $y = x.\tan\theta$
Voilà pourquoi, le point P d'abscisse 1 et qui appartient à (OM) a pour ordonnée $\tan\theta$.

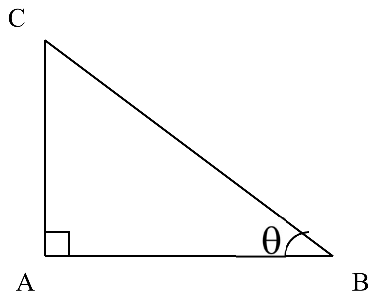


Valeurs remarquables



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin θ	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos θ	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tan θ	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	Impossible

ABC est un triangle rectangle en A, et $\widehat{B}$ est aigüe.

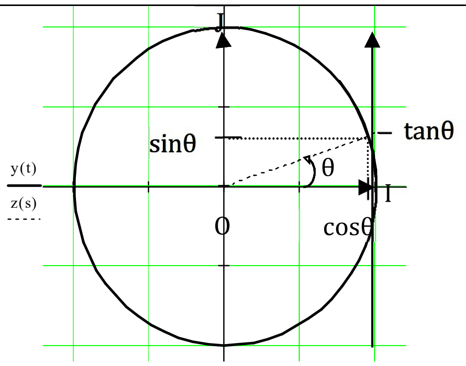


$$\cos(\theta) = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Lecture de quelques formules sur le cercle trigonométrique

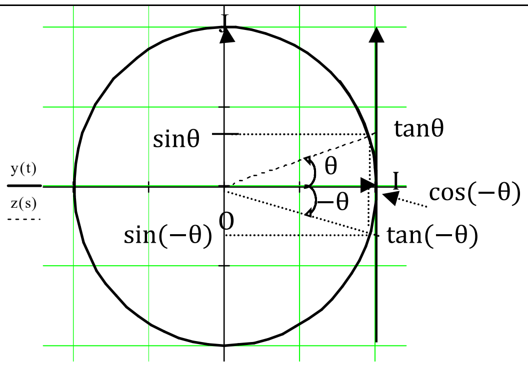


$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$$
$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$
$$\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan(\theta + 2\pi) = \tan(\theta)$$
$$\tan(\theta + 2k\pi) = \tan\theta \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques

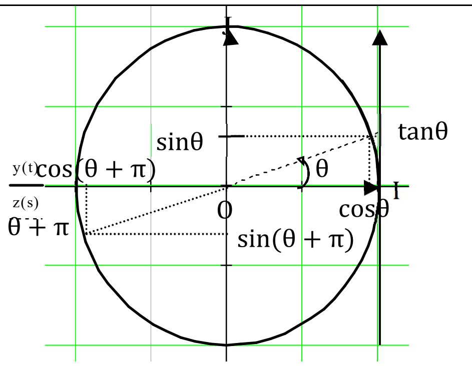


$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$$

La fonction cosinus est paire, les fonctions sinus et tangente sont impaires



$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$$

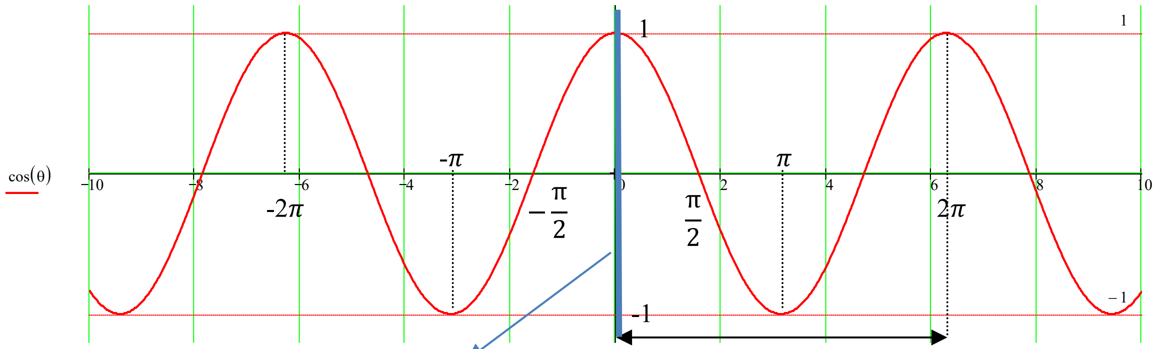
$$\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$$
$$\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

La fonction tangente est π-périodique

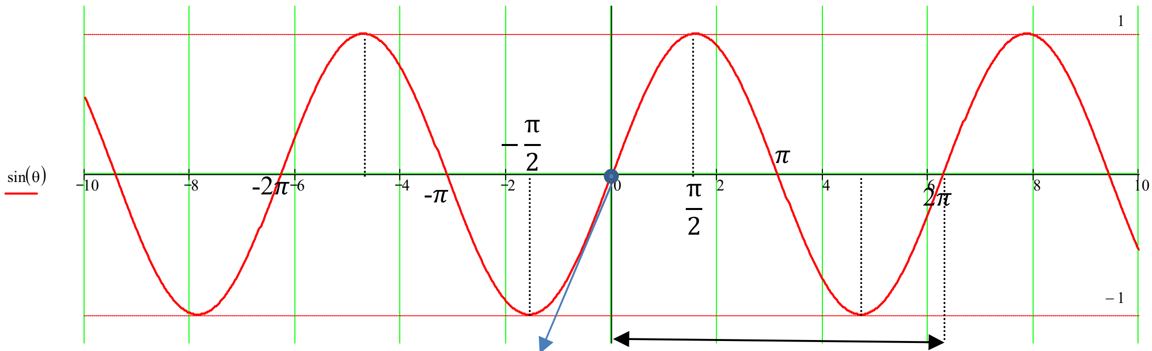
Encadrement de cosinus et sinus : $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos(\theta) \leq 1 \;$ et $\; -1 \leq \sin(\theta) \leq 1$

Représentation graphique des fonctions cosinus, sinus et tangente :



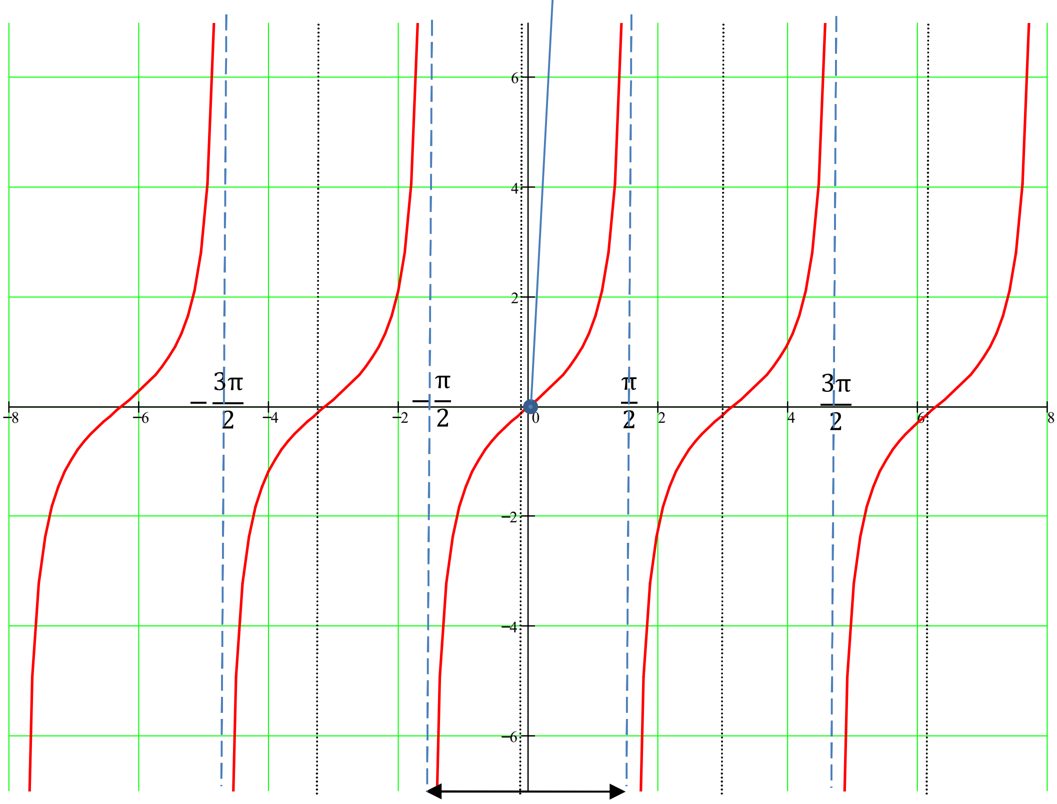
Cosinus est paire : sa courbe est symétrique par rapport à (Oy)

période : 2π



Sinus et tangente sont impaires : leurs courbes sont donc symétriques par rapport à O

période : 2π



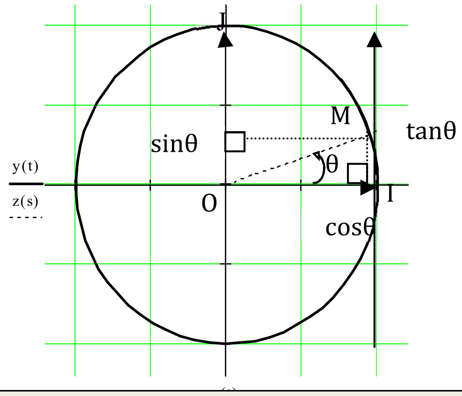
période : π

Formulaire de trigonométrie

$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \forall\, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

$1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \quad \forall\, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$



$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\sin(2a) = 2.\sin a.\cos a$

Formules de linéarisation : (Transformation d'un produit en somme)

$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$

$\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

$\sin(a).\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$

$\sin(a).\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$

$\cos(a).\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$

$\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b} \qquad \tan(2a) = \frac{2.\tan a}{1-\tan^2 a}$

Dérivées : (U est une fonction de x, dérivable).

$(\cos(x))' = -\sin(x) \qquad (\cos(ax+b))' = -a.\sin(ax+b) \qquad (\cos(U))' = -U'.\sin(U)$

$(\mathrm{Sin}(x))' = \cos(x) \qquad (\sin(ax+b))' = a.\cos(ax+b) \qquad (\sin(U))' = U'.\cos U$

$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$

$(\tan(ax+b))' = a.\left(1 + \tan^2(ax+b)\right) = \frac{a}{\cos^2(ax+b)} \quad \forall\, ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$

$(\tan(U))' = \left(1 + \tan^2(U)\right).U' = \frac{U'}{\cos^2(U)} \quad \forall\, U(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$

Primitives de sin(ax+b) : $-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ + Cte ($a \neq 0$)

Primitives de U'.sin(U) : -cos(U) + Cte

Primitives de cos (ax+b) : $\frac{1}{a}\sin(ax+b)$ + Cte ($a \neq 0$)

Primitives de U'.cos (U) : sin(U) + Cte

Primitives de $\frac{1}{\cos^2(ax+b)} = 1 + \tan^2(ax+b)$: $\frac{1}{a}\tan(ax+b)$ + Cte ($a \neq 0$)

Primitives de $\frac{U'}{\cos^2(U)} = U'.\left(1 + \tan^2(U)\right)$: $\tan(U)$ + Cte

Etude de signaux trigonométriques

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \quad \theta \longmapsto \sin\theta \qquad \cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \quad \theta \longmapsto \cos\theta \qquad \tan : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k\epsilon\mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \theta \longmapsto \tan\theta$$

<u>Période, fréquence, pulsation, amplitude, déphasage</u>

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques, et la fonction tangente est π-périodique
En effet, on a vu que : $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$; $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$ et $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$
Les fonctions $t \longmapsto \sin(\omega t + \varphi)$ et $t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$ sont périodiques de <u>période</u> : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ où $\omega \neq 0$
En effet, $\sin(\omega(t + T) + \varphi) = \sin(\omega t + \omega T + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi + 2\pi) = \sin(\omega t + \varphi)$

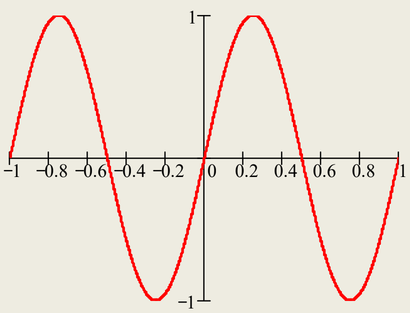
La fréquence f d'une fonction T-périodique est le nombre de motifs par unité de temps (si la variable t représente le temps). Donc $f = \frac{1}{T}$. Si T est en seconde, alors **f est en s^{-1} ou en Hertz (Hz).** Ainsi, **$t \longmapsto \sin(\omega t + \varphi)$** a pour fréquence **$f = \frac{\omega}{2\pi}$**

On peut également exprimer le rythme d'une fonction périodique par la notion de **<u>pulsation</u>** (ou fréquence angulaire) **ω**, exprimé en **radians par seconde (rd/s)**

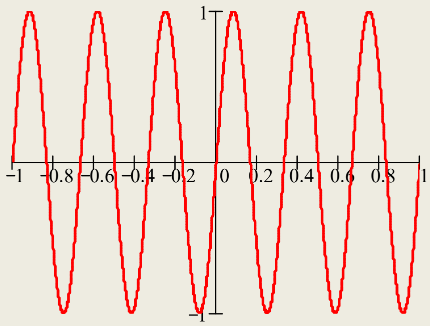
$t \longmapsto A.\sin(\omega t + \varphi)$ a pour <u>amplitude $|A|$</u>

$f_1 : t \longmapsto A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ et $f_2 : t \longmapsto A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$ sont en déphasage de $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.
Si $\Delta\varphi > 0$ ($\Delta\varphi < 0$), on dit que f_2 est en avance (retard) de phase par rapport à f_1.
Les signaux **cosinus et sinus sont déphasés de $\frac{\pi}{2}$**, en effet, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$.

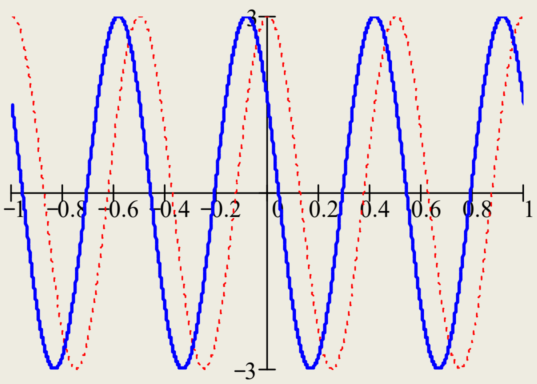
<u>Représentations graphiques de quelques signaux trigonométriques</u>



Fonction : $y = \sin(2\pi t)$
Période : T = 1 s
Fréquence : f = 1 Hz (1 motif sur 1 s)



Fonction : $y = \sin(6\pi t)$
Période : T = 1/3 s
Fréquence : f = 3 Hz (3 motifs sur 1s)



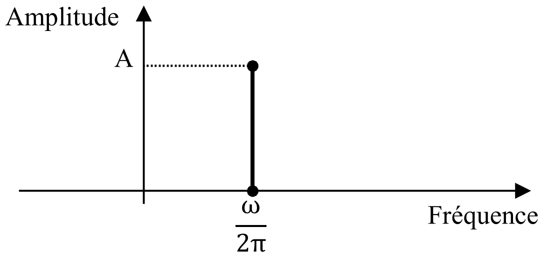
Fonction "trait pointillé" : $y = 3\cos(4\pi t)$
Fonction "trait continu": $y = 3\cos(4\pi t + \frac{\pi}{3})$

Période des signaux : T = 1/2 s
Fréquence des signaux : f = 2 Hz (2 motifs sur 1 s)
Amplitude des signaux : 3 (unités en ordonnée)
Déphasage : $4\pi t + \frac{\pi}{3} - 4\pi t = \frac{\pi}{3}$ s

Spectre de signaux sinusoïdaux

Le **spectre** d'un signal est la **représentation des amplitudes** des différentes composantes présentes dans le signal **en fonction de la fréquence.**

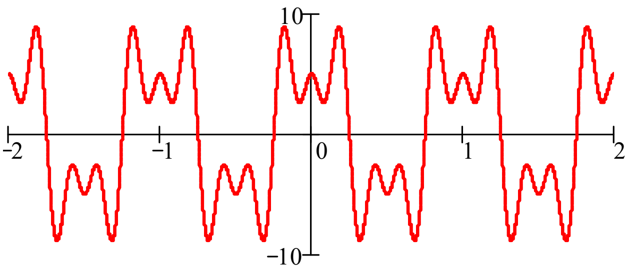
Spectre du signal sinusoïdal $\mathbf{x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)}$(etdonc aussi du signal $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$)

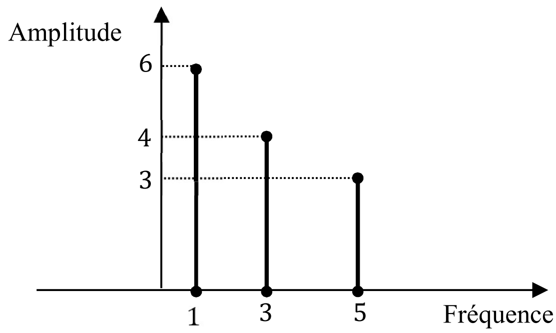


Le spectre d'une somme de sinusoïdes est la somme de leurs spectres.

Spectre du signal périodique $\mathbf{x(t) = 3\cos(10\pi t) + 6\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos(6\pi t)}$

Représentation temporelle





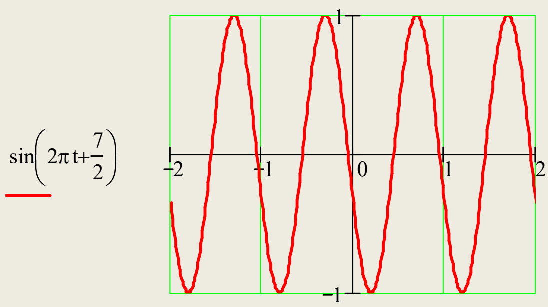
Valeur moyenne, valeur efficace d'un signal périodique

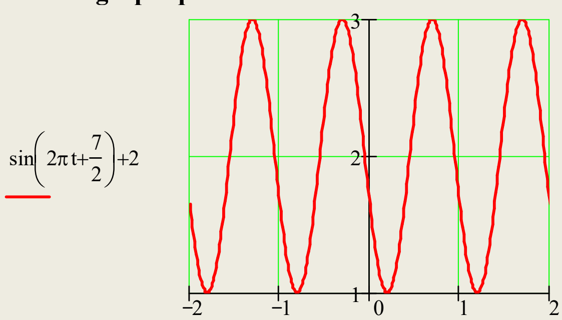
La **valeur moyenne** d'une fonction intégrable et T-périodique f, est la valeur donnée par : $\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt$ où a est un nombre réel quelconque. La **valeur efficace** de f est la racine carré de la valeur moyenne de f^2 : $\sqrt{\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f^2(t)dt}$

Rappel : Si F est une fonction primitive de f (c'est à dire : $F'(t) = f(t) \quad \forall t$), alors $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Valeur moyenne du sinus : $\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t + \varphi)dt = \frac{1}{T\omega}[-\cos(\omega t + \varphi)]_0^T = \frac{1}{T\omega}(-\cos(\omega T + \varphi) + \cos\varphi)$
Comme $\omega T = 2\pi$, et la fonction cosinus est 2π-périodique, alors $\cos(\omega T + \varphi) = \cos\varphi$ et :

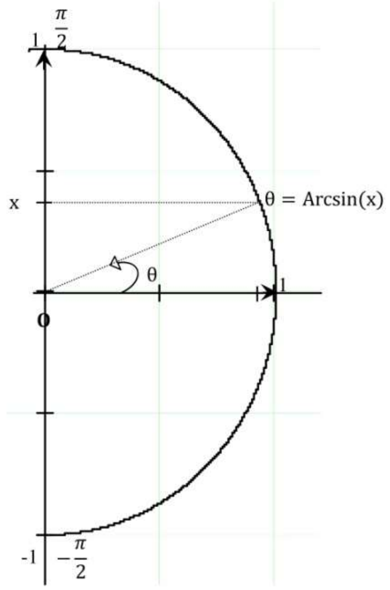
la valeur moyenne de cosinus est donc nulle, on retrouve ce résultat graphiquement.





Soit m, la valeur moyenne du signal périodique f, alors m+k est la valeur moyenne du signal f+k où k est une constante .

Arcsinus



Soit $x \in [-1;1]$, on appelle Arcsinus de x et on note Arcsin(x), l'unique angle $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ solution de l'équation : $\sin(\theta) = x$.

$\mathrm{Arcsin}(1)=\frac{\pi}{2}$; $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$; $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{-1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$

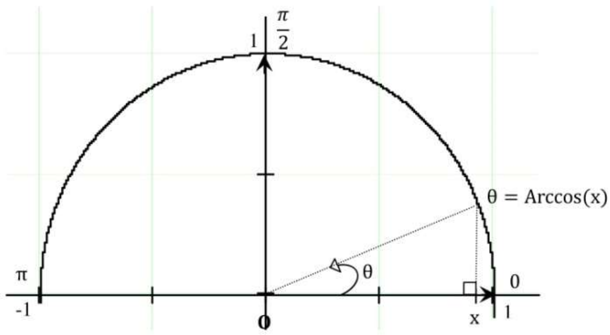
$\forall x \in [-1;1] \quad \sin(\mathrm{Arc}\sin(x)) = x$

$\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \quad \mathrm{Arc}\sin(\sin(\theta)) = \theta$

$\sin\left(\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{1}{8}\right)\right)=\frac{1}{8}$; $\mathrm{Arc}\sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)=\frac{\pi}{7}$

$\mathrm{Arc}\sin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=-\frac{\pi}{2}$

Arccosinus



Soit $x \in [-1;1]$, on appelle Arccosinus de x et on note Arccos(x), l'unique angle $\theta \in [0;\pi]$ solution de l'équation : $\cos(\theta) = x$.

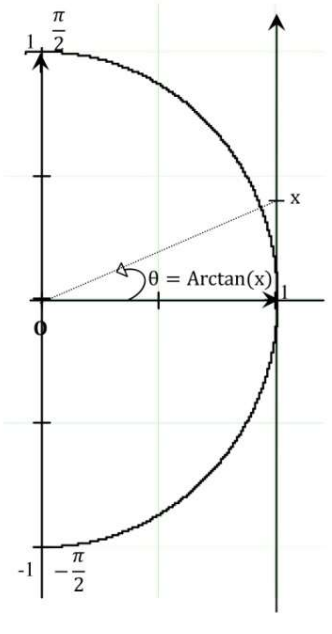
$\mathrm{Arccos}(1)= 0$; $\mathrm{Arccos}\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$

$\forall \theta \in [0;\pi] \quad \mathrm{Arc}\cos(\cos(\theta)) = \theta$

$\forall x \in [-1;1] \quad \cos(\mathrm{Arc}\cos(x)) = x$

$\mathrm{Arc}\cos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)=\frac{5\pi}{12}$; $\mathrm{Arc}\cos\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right)=\frac{7\pi}{8}$

Arctangente



Soit $x\in \mathbb{R}$, on appelle Arctangente de x et on note Arctan(x), l'unique angle $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ solution de l'équation : $\tan(\theta) = x$.

$\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$; $\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\mathrm{Arctan}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

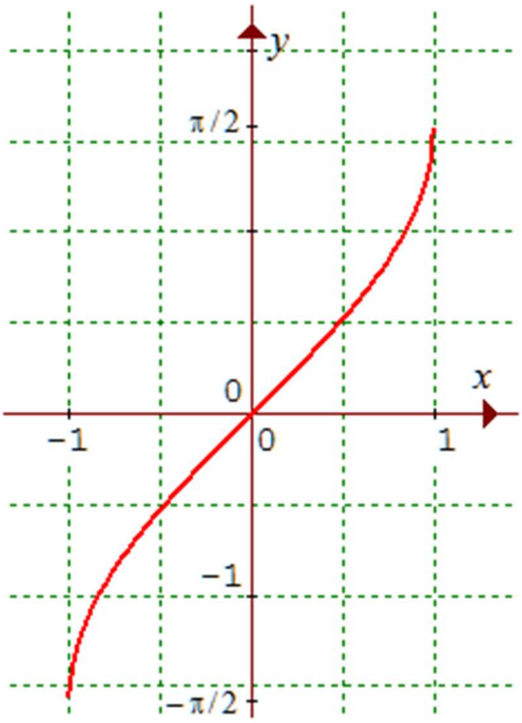
$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$

$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\mathrm{Arctan}(\tan(\theta)) = \theta$

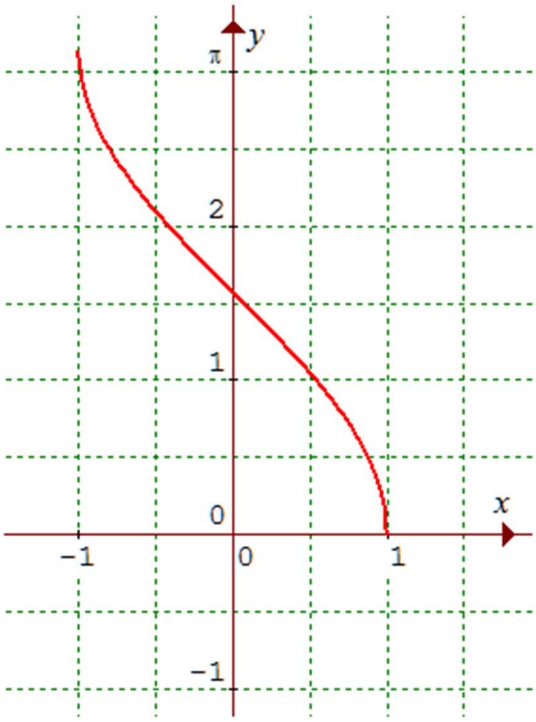
$\tan(\mathrm{Arctan}112)=112$; $\mathrm{Arc}\tan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{4}$

$\mathrm{Arc}\tan\left(\tan\left(\frac{-\pi}{16}\right)\right)=-\frac{\pi}{16}$

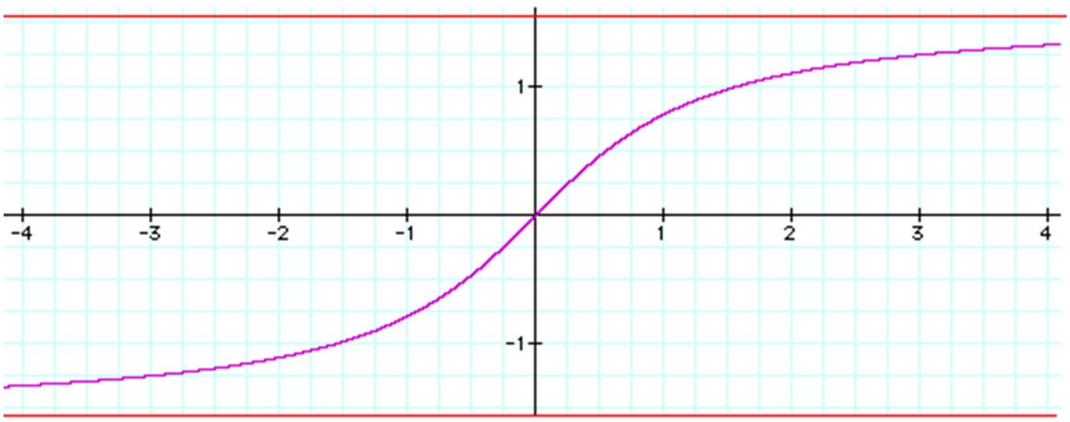
Arsinus



Arccosinus



Arctangente



$\frac{d}{dx}(\text{Arcsin}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \forall\, x \in \,]-1;1[$

$\frac{d}{dx}(\text{Arccos}(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ \forall x \in \,]-1;1[$

$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2} \ \forall x \in \mathbb{R}}$

Rappels sur les nombres complexes

$$\underline{Z} = x + j.y \qquad \text{où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

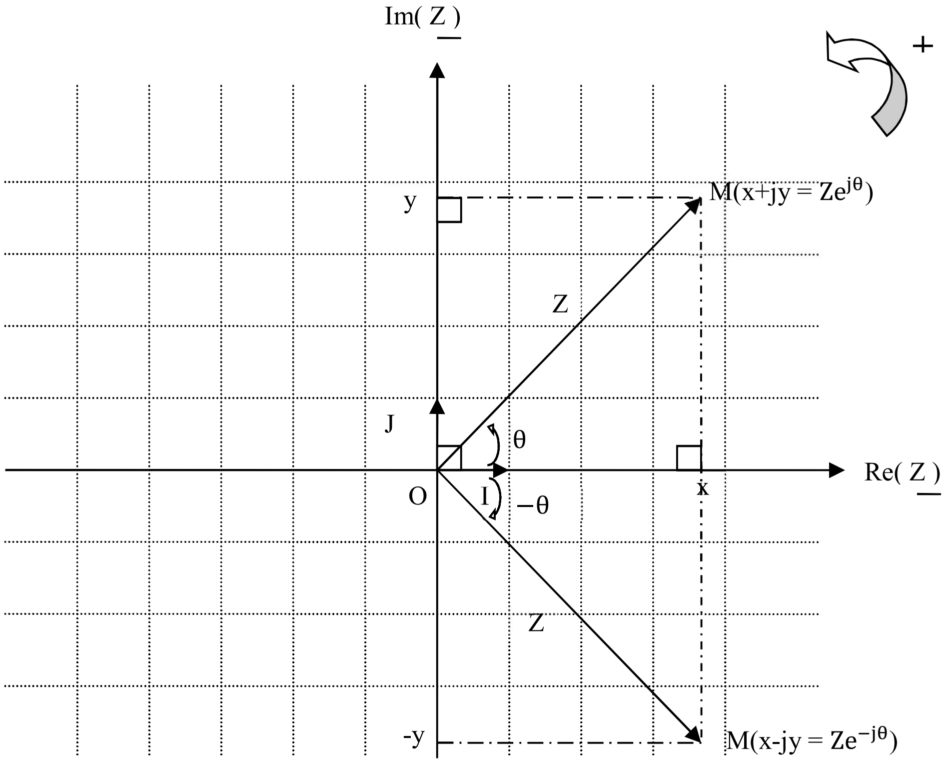
Le <u>module</u> de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $\left|\underline{Z}\right|$, c'est la distance de O à M, donc $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

L'<u>argument</u> de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à 2kπ près ($k \in \mathbb{Z}$). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$, on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Re}(\underline{Z})}{Z} \\[2ex] \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{Z} \end{cases} \quad \text{si } Z \neq 0.$$

Le <u>plan complexe</u> est muni d'un RON (O ; $\vec{OI}$, $\vec{OJ}$) orienté dans le sens direct.
$\underline{Z} = x + j.y$ où $x,y \in \mathbb{R}$

Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.
$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.
$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\vec{OM}$.
$\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$



<u>Forme algébrique</u> de $\underline{Z}$:
$\underline{Z} = x + j.y$ **(coordonnées cartésiennes)**

<u>Forme trigonométrique</u> de $\underline{Z}$:
$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.(\cos(\theta) + j.\sin(\theta))$ **(coordonnées polaires)**

<u>Forme exponentielle, géométrique ou polaire</u> : Euler a noté $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$
$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$

<u>Nombre complexe conjugué</u> de $\underline{Z}$: Soit $\underline{Z} = x + j.y$, on appelle conjugué de $\underline{Z}$, et on note $\underline{Z}^*$, le nombre complexe défini par : $\underline{Z}^* = x - j.y$. Si $\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$, alors $\underline{Z}^* = Z.e^{-j\theta}$

$$\underline{Z} = \underline{Z}' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(\underline{Z}) = \mathrm{Re}(\underline{Z}') \\ \mathrm{Im}(\underline{Z}) = \mathrm{Im}(\underline{Z}') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\underline{Z}| = |\underline{Z}'| \\ \theta = \theta' + 2.k.\pi \end{cases}$$

$$\arg(\underline{Z}.\underline{Z}') = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{Z}') + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ ,\ \text{et}\ \left|\underline{Z}.\underline{Z}'\right| = \left|\underline{Z}\right|.\left|\underline{Z}'\right|$$

$$\arg\left(\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right) = \arg(\underline{Z}) - \arg(\underline{Z}') + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ ,\ \text{et}\ \left|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right| = \frac{\left|\underline{Z}\right|}{\left|\underline{Z}'\right|}$$

$$\arg\left(\frac{1}{\underline{Z}}\right) = -\arg(\underline{Z}') + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ ,\ \text{et}\ \left|\frac{1}{\underline{Z}}\right| = \frac{1}{\left|\underline{Z}\right|}$$

$$\arg\left(\underline{Z}^n\right) = n \times \arg(\underline{Z}) + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ ,\ \text{et}\ \left|\underline{Z}^n\right| = \left|\underline{Z}\right|^n$$

$$\frac{d}{d\theta}(\underline{Z}) = \frac{d}{d\theta}\left(Ze^{j.\theta}\right) = j.Z.e^{j.\theta} = j.\underline{Z}$$ « Dériver par rapport à θ c'est multiplier par j »

Une primitive de $\underline{Z}$ par rapport à θ est $\frac{\underline{Z}}{j} = -j.\underline{Z}$ « Intégrer par rapport à θ c'est multiplier par –j »

$$\underline{Z} + \underline{Z}^* = 2.\,\mathrm{Re}(\underline{Z})\quad ;\quad \underline{Z} - \underline{Z}^* = 2.j.\,\mathrm{Im}(\underline{Z})\quad ;\quad \underline{Z}.\underline{Z}^* = Z^2$$

Formules d'Euler : $\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$

Formule de Moivre : $\left(\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$

Calcul d'un argument, avec la fonction arctangente

Soit $\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{a} + \mathbf{j.b}$ un nombre complexe non nul, tel que a ≠ 0.

$$\mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Z}}) = \begin{cases} \mathbf{Arctan}\left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right)\ \ \mathbf{si}\ \ \mathbf{a} > \mathbf{0} \\ \mathbf{Arctan}\left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right) \pm \pi\ \ \mathbf{si}\ \ \mathbf{a} < \mathbf{0} \end{cases}$$

Application à la transformation d'un signal de la forme : $\mathbf{a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t)}$

$$\mathbf{f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t) = A.\cos(\omega t - \varphi)\ \text{où}\ A = |a + jb|\ \text{et}\ \varphi = \arg(a + jb)}$$

f est donc un signal sinusoïdal d'amplitude A, de période $\frac{2\pi}{\omega}$, et de déphasage φ.

Exercices d'application sur les nombres complexes.

<u>Exercice 1</u>: 1) Ecrire sous forme algébrique : $Z = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+i}}$

2) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :
$\underline{Z}_1 = 4 + 3j$; $\underline{Z}_2 = -5 + 3j$; $\underline{Z}_3 = \sqrt{7} - j\sqrt{2}$

$\underline{Z}_4 = R + j.L.\omega$ (impédance complexe d'u circuit RLC en parallèle) ; $\underline{Z}_5 = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{j.L.\omega} + j.C.\omega$

où R, L,C et ω sont des nombres réels non nuls. ; $\underline{Z}_6 = \dfrac{jRL\omega}{R+jL\omega}$ (R, L et ω sont des réels strictement positifs.) $\underline{Z}_7 = \dfrac{(1+jx)^{10}}{(1-jx)^6}$ où x est un nombre réel.

3) Ecrire sous forme polaire : $Z = 1 + e^{i\theta}$

4) Déterminer les parties réelle et imaginaire de : $Z = e^{e^{i\theta}}$

<u>Exercice 2</u> : Résoudre l'équation : $z^6 = \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$

<u>Exercice 3</u> : Soit $Z = \dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$

1) Ecrire Z sous forme polaire
2) Ecrire Z sous forme algébrique
3) $t = \tan(\dfrac{a}{2})$, en déduire les formules suivantes : $\begin{cases} \sin(a) = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos(a) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan(a) = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$

<u>Exercice 4</u> : Factoriser le polynôme : $P(z) = 4z^2 + 4z\sqrt{3} + 1 - 2i\sqrt{3}$

<u>Exercice 5</u> : Déterminer les racines du polynôme P, sachant que l'une d'elle est un imaginaire pur. $P(z) = z^3 - 3z^2 + (9+4i)z - 15$

<u>Exercice 6</u> :

Soit $Z(\omega)$ l'expression d'une impédance complexe donnée par $Z(\omega) = \dfrac{1 + i\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + i\frac{\omega}{\omega_2}}$ avec $\omega_2 > \omega_1$ et $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}_+$

1°. déterminer $|Z(\omega)|$

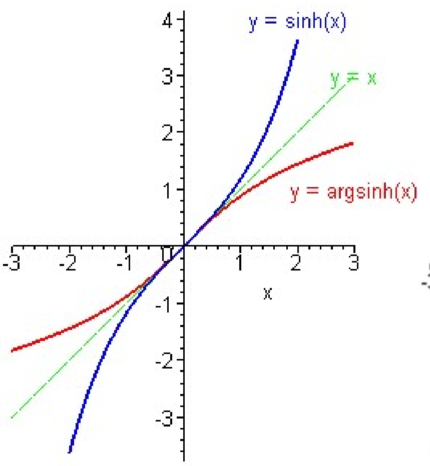
2°. Soit $\phi = arg(z)$.Montrer que $\phi \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$ et déterminer $\tan\phi$.

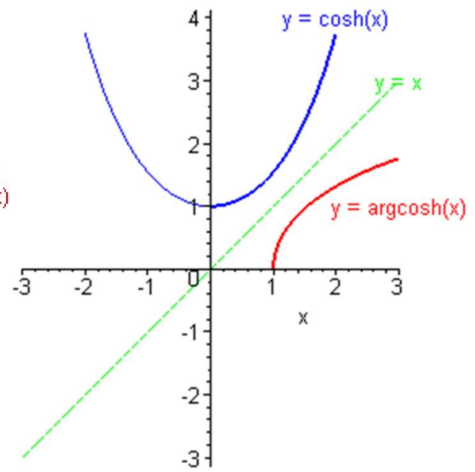
3°. Calculer les limites de $|Z(\omega)|$ et $arg(Z(\omega))$ quand $\omega \to +\infty$ puis quand $\omega \to 0$

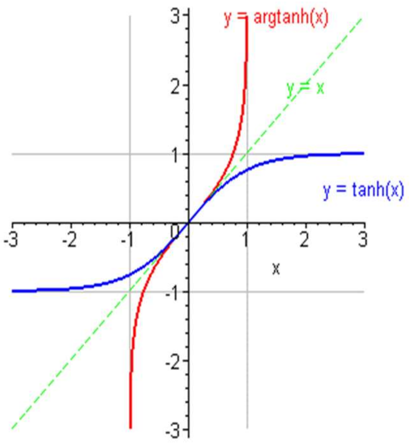
Fonctions hyperboliques et leur réciproque

- cosinus hyperbolique est la fonction notée ch et définie par : $\mathbf{ch(x)} = \frac{\mathbf{e^x+e^{-x}}}{\mathbf{2}}$
- sinus hyperbolique est la fonction notée sh et définie par : $\mathbf{sh(x)} = \frac{\mathbf{e^x-e^{-x}}}{\mathbf{2}}$
- tangente hyperbolique est la fonction notée th et définie par : $\mathbf{th(x)} = \frac{\mathbf{sh(x)}}{\mathbf{ch(x)}} = \frac{\mathbf{e^x-e^{-x}}}{\mathbf{e^x+e^{-x}}}$

$$\mathrm{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad \forall x \geq 1$$
$$\mathrm{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad \forall x$$
$$\mathrm{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad \forall -1 < x < 1$$







$\mathbf{ch^2x - sh^2x = 1}$

Les fonctions sh et th sont impaires, la fonction ch est paire.

$$\left(\mathrm{ch}(x)\right)' = \mathrm{sh}(x) \;;\quad \left(\mathrm{sh}(x)\right)' = \mathrm{ch}(x)$$

$$\left(\mathrm{th}(x)\right)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$$

$$\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$$

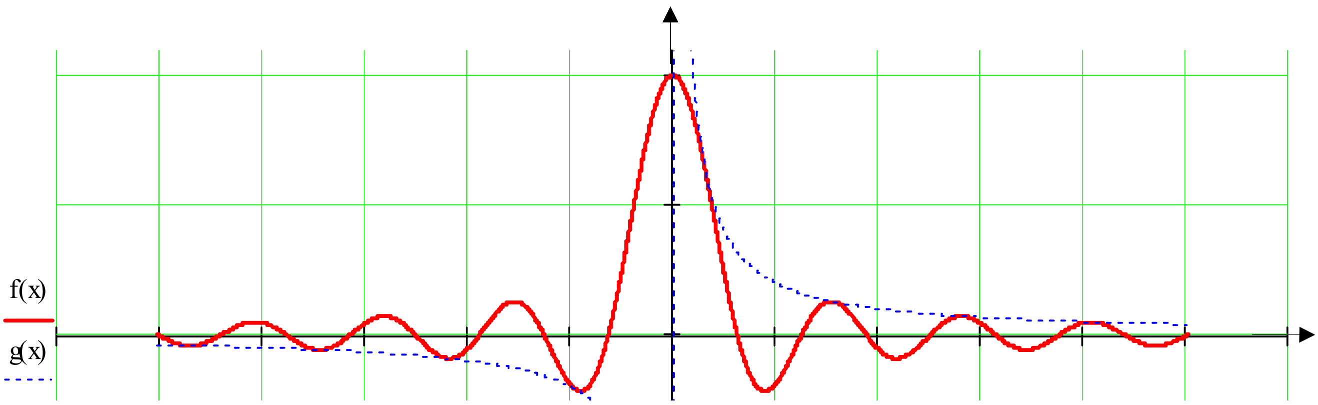
$$\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$$

$$\mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{th}(x)+\mathrm{th}(y)}{1+\mathrm{th}(x)\mathrm{th}(y)}$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Argsh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Argch}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \forall x \in \left]1; +\infty\right[$$
$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Argth}(x)) = \frac{1}{1-x^2} \quad \forall x \in \left]-1\,;\, 1\right[$$

On appelle **sinus cardinal** et on note sinc, la fonction définie par :

$$\mathbf{sinc(x)} = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



On observe un signal périodique dont l'amplitude des oscillations décroît au cours du temps. On appelle la période d'un tel signal la **pseudo-période** T, temps qui s'écoule entre deux valeurs maximales successives, elle est constante. Ici $T = 2\pi$.
On dit que la courbe représentant le sinus cardinal est une **sinusoïdale amortie**.

Définition 2 : On appelle sinus cardinal et on note sinc, la fonction définie par :

$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Sa courbe est une sinusoïdale amortie de pseudo période 2.

Formulaire sur les dérivées (rappel)

Si f et g sont dérivables sur I, alors : αf, f+g, $f \times g$ et f/g (avec $g \neq 0$) sont dérivables sur I.
(α est un nombre réel) et :

$$\mathbf{(\alpha f)' = \alpha f' \;,\; (f+g)' = f' + g' \;,\; (fg)' = f'g + fg' \text{ et } (f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}} \;.$$

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur f(I), alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$\mathbf{(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'}$$

$(x^n)' = n.x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$	$\mathbf{(U^n)' = n.U'.U^{n-1}} \;,\; \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \in]0\,;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$	$\mathbf{(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}} \;,\; \mathbf{U(I)} \subseteq]0\,;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$	$\mathbf{\left(\frac{1}{U}\right)' = \frac{-U'}{U^2}} \;,\; \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}^*$
$(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\mathbf{(e^U)' = U'.e^U} \;,\; \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0\,;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$	$\mathbf{(\ln(U))' = \frac{U'}{U}} \;,\; \mathbf{U(I)} \subseteq]0\,;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$
$(\sin(x))' = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\mathbf{(\sin(U))' = U'.\cos(U)} \;,\; \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\cos(x))' = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\mathbf{(\cos(U))' = -U'.\sin(U)} \;,\; \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbf{(\tan(U))' = \frac{U'}{\cos^2(U)} = \left(1 + \tan^2(U)\right).U'}$ $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Définitions / Théorèmes

Primitive Soit f, une fonction continue sur [a,b]. On appelle fonction primitive de f sur [a,b] toute fonction notée F, définie par : F'(x) = f(x) $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

on notera : $\int \mathbf{f(x)dx}$ toutes les fonctions primitives de f, on a donc :

$$\int \mathbf{f(x)dx = F(x) + cte}$$

Intégrale sur un intervalle fermé : Soit f, une fonction continue sur [a,b], soit F, une fonction primitive de f. On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Méthodes de calcul

Linéarité Soit f, g deux fonctions continues sur [a,b]. Soit α et β deux nombres réels. On a alors :

$$\int_a^b (\alpha \mathbf{f(t)} + \beta \mathbf{g(t)})\mathbf{dt} = \alpha \int_a^b \mathbf{f(t)dt} + \beta \int_a^b \mathbf{g(t)dt}$$

Chasles Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I. Soit a,b,c trois réels de I. On a alors :

$$\int_a^b \mathbf{f(t)dt} = \int_a^c \mathbf{f(t)dt} + \int_c^b \mathbf{f(t)dt}$$

$$\boxed{\int_b^a \mathbf{f(t)dt} = -\int_a^b \mathbf{f(t)dt}}$$

Inégalités Soit f et g, deux fonctions continues sur [a,b] telles que $f(x) \le g(x) \ \forall x \in [a,b]$, on a alors :

$$\int_a^b \mathbf{f(x)dx} \le \int_a^b \mathbf{g(x)dx}$$

Intégration par parties Soit u et v deux fonctions dérivables sur [a,b] telles que u' et v' sont continues sur [a,b].

On a alors :

$$\int_a^b \mathbf{u(t).v'(t)dt} = [\mathbf{u(t).v(t)}]_a^b - \int_a^b \mathbf{u'(t).v(t)dt}$$

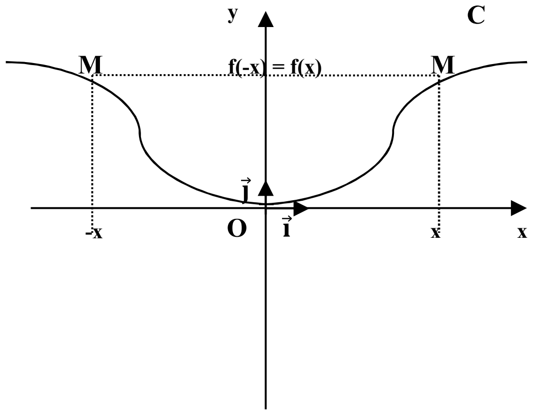
Changement de variable Soit f, une fonction continue sur [a,b]. Soit $I = \int_a^b f(x)dx$.

On pose $x = \varphi(t)$, où φ est une fonction telle que : $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, φ est bijective et dérivable sur $[\alpha,\beta]$ si φ est croissante (et $[\beta,\alpha]$ sinon).

On a alors : $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ donc $dx = \varphi'(t)dt$, et :

$$\mathbf{I} = \int_a^b \mathbf{f(x)dx} = \int_\alpha^\beta \mathbf{f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$$

Quelques propriétés de calculs intéressantes



Intégrale d'une fonction paire sur un intervalle centré en 0

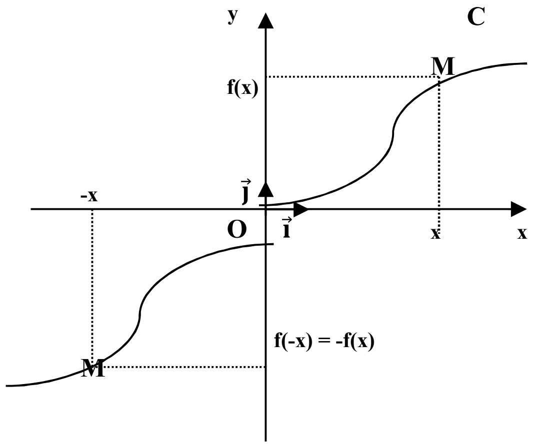
Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite paire lorsque :

$$\forall x \in D \ \ f(-x) = f(x).$$

Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Soit f, une fonction paire et intégrable sur [-a,a].

On a alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_{0}^{a} f(x)dx$.



Intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0

Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite impaire lorsque :

$$\forall x \in D \ \ f(-x) = -f(x).$$

Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

Soit f, une fonction impaire et intégrable sur [-a,a]. On a alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Intégrale d'une fonction T- périodique sur un intervalle de longueur T

Rappel : Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, est dite périodique lorsqu'il existe un nombre réel positif, T, le plus petit possible tel que :
$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D} \ \ \mathbf{f(x+T) = f(x)}$. On dit aussi que f est T-périodique.
Propriété : Soit f, une fonction Soit f, une fonction T-périodique, intégrable sur tout intervalle de longueur T : [a,a+T]. On a alors :

$$\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$$

$\int x^{\alpha}.dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \ ; \ \alpha \neq -1$	$\int U'.U^{\alpha} dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \ ; \ \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + cte$	$\int \frac{U'}{2\sqrt{U}} dx = \sqrt{U} + cte$
$\int e^{x}.dx = e^{x} + cte$	$\int U'.e^{U}.dx = e^{U} + cte$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln(\lvert x \rvert) + cte$	$\int \frac{U'}{U} dx = \ln(\lvert U \rvert) + cte$
$\int \cos(x).dx = \sin(x) + cte$	$\int U'.\cos(U).dx = \sin(U) + cte$
$\int \sin(x).dx = -\cos(x) + cte$	$\int U'.\sin(U).dx = -\cos(U) + cte$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}.dx = \tan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\cos^2(U)}.dx = \tan(U) + cte$
$\int (1+\tan^2(x)).dx = \tan(x) + cte$	$\int U'.(1+\tan^2(U)).dx = \tan(U) + cte$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \arcsin(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}.dx = \arcsin(U) + cte$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \arccos(x) + cte$	$\int \frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}.dx = \arccos(U) + cte$
$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = \arctan(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1+U^2}.dx = \arctan(U) + cte$
$\int ch(x).dx = sh(x) + cte$	$\int U'.ch(U).dx = sh(U) + cte$
$\int sh(x).dx = ch(x) + cte$	$\int U'.sh(U).dx = ch(U) + cte$
$\int \frac{1}{ch^2(x)}.dx = th(x) + cte$	$\int \frac{U'}{ch^2(U)}.dx = th(U) + cte$
$\int (1-th^2(x)).dx = th(x) + cte$	$\int U'.(1-th^2(U)).dx = th(U) + cte$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.dx = \arg ch(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\sqrt{U^2-1}}.dx = \arg ch(U) + cte$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.dx = \arg sh(x) + cte$	$\int \frac{U'}{\sqrt{U^2+1}}.dx = \arg sh(U) + cte$
$\int \frac{1}{1-x^2}.dx = \arg th(x) + cte$	$\int \frac{U'}{1-U^2}.dx = \arg th(U) + cte$

Exercices sur le calcul intégral.

<u>Exercice 1</u> : Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 x(x^2+1)^5 dx$; $J = \int_{-2}^{2} \sqrt{x+2}.dx$; $K = \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1} dx$; $L = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x.dx$;

$M = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \arg sh(x^3) dx$; $N = \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx) dx$ où p et q sont des entiers relatifs ; $A = \int_0^1 \frac{6}{3x^2+1}$

<u>Exercice 2</u> : Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration par parties.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} x.\sin(\alpha x).dx$ où $\alpha \neq 0$; $J = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x.dx$; $K = \int_1^e (\ln x)^2.dx$;

$L(x) = \int x^n.\ln x.dx$ où n est un entier relatif ; $M(x) = \int \cos x.\ln(1+\cos x).dx$;

$N(x) = \int x.\tan^2 x.dx$; $P(x) = \int \frac{x.\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.dx$; $Q(x) = \int (\arcsin x)^2.dx$;

$R(x) = \int x.(\arctan x)^2.dx$; $S(x) = \int e^{ax}\cos(bx).dx$ où a et b sont des réels non nuls ;

$T(x) = \int \sin(\ln x).dx$; $U(x) = \int \sqrt{1-x^2}.dx$; $V(x) = \int \sqrt{1+x^2}.dx$; $W(x) = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}}.dx$.

<u>Exercice 3</u> : A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{5\sin x}{1+4co} dx$; $B = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}}{2e^x-1} dx$; $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$,on posera $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$; $J(x) = \int \frac{dx}{\sin x}$;

$K(x) = \int \frac{dx}{\cos x}$; $M(x) = \int \frac{dx}{a^2+x^2}$; $S(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-12x+13}}$; $T(x) = \int \frac{x+3}{\sqrt{-x^2-4x+5}}$;

$V(x) = \int \sqrt{a^2+x^2} dx$; $W(x) = \int \sqrt{x^2+4x+13}.dx$

<u>Exercice 4</u> : Calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2(2x) dx$; $I(x) = \int \tan x.dx$; $K(x) = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$; $L(x) = \int (\ln(\tan x)).\cos x.dx$

Rappels sur les équations différentielles linéaires du premier ordre

Equation différentielle linéaire à coefficients constants

Résolution Résoudre une l'EDL à coefficients constants :
(E) $a.y'(x)+b.y(x)=f(x)$ (où $a \neq 0$, b sont des constantes et f une fonction continue sur I), c'est rechercher toutes les fonctions y(x) solutions dérivables dans I. Pour cela,
Etape 1 : On résout l'équation homogène (ou sans second membre) associée :

$$(E_0)\quad a.y'(x)+b.y(x)=0$$

Les solutions de (E_0) sont : $y_0(x)=\lambda.e^{-\frac{b}{a}x}$ où λ est une constante réelle.
Etape 2 : On recherche une solution particulière de (E), que l'on note y_p.
Etape 3 : Les solutions de (E) sont alors toutes les fonctions de la forme : $\mathbf{y(x)=y_0(x)+y_p(x)}$ (on les appelle aussi solutions générales de (E))

A retenir : recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle linéaire de premier ordre à coefficients constants : $a.y'(x)+b.y(x)=f(x)$ (E)
- Si f est un polynôme, on cherchera alors y_p sous forme d'un polynôme de même degré.
- Si $f(x)=\alpha.\cos(mx)+\beta.\sin(mx)$ où α, β et m sont des réels, on cherchera alors y_p sous la même forme : $y_p(x)=A.\cos(mx)+B.\sin(mx)$ où A et B sont des constantes à déterminer
- Si $f(x)=g(x).e^{m.x}$ où g est une fonction continue sur I, et m un réel, on cherchera alors y_p sous la même forme : $y_p(x)=z(x).e^{m.x}$ où z est une fonction à déterminer.
- Si $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ où f_1 et f_2 sont des fonctions, comme celles citées précédemment, on cherchera alors y_P sous la même forme : $f(x)=y_{p1}(x)+y_{p2}(x)$ où y_{P1} est une solution particulière de l'équation $a.y'(x)+b.y(x)=f_1(x)$ et y_{P2}, une solution particulière de l'équation $a.y'(x)+b.y(x)=f_2(x)$. On appelle ce dernier point le théorème de superposition

Equation différentielle linéaire à coefficients non constants

Définition/Théorème Résoudre une l'EDL : (E) $a(x).y'(x)+b(x).y(x)=f(x)$ (où $a \neq 0$, b et f sont des fonctions continues sur I), c'est rechercher toutes les fonctions y(x) solutions dérivables dans I. Pour cela,
Etape 1 : On résout l'équation homogène (ou sans second membre) associée :

$$(E_0)\quad a(x).y'(x)+b(x).y(x)=0$$

Les solutions de (E_0) sont : $y_0(x)=\lambda.e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$ où λ est une constante réelle.
Etape 2 : On recherche une solution particulière de (E), que l'on note y_p.
Etape 3 : Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme : $y(x)=y_0(x)+y_p(x)$

Résolution d'EDL dont on ne connaît pas de solution particulière : Méthode de variation de la constante :

On doit résoudre une l'EDL : (E) $a(x).y'(x)+b(x).y(x)=f(x)$, pour cela :
Etape 1 : On résout l'équation homogène (ou sans second membre) associée :

$$(E_0)\quad a(x).y'(x)+b(x).y(x)=0$$

Les solutions de (E_0) sont notées : $y_0(x)=\lambda.g(x)$ où λ est une constante réelle.
Etape 2 : On pose **y(x)=** $\lambda(x).g(x)$ (la constante λ devient une fonction $\lambda(x)$), et on recherche toutes les fonctions λ telles que y est solution de (E).
Etape 3 : Les solutions de (E) sont toutes les fonctions y(x) obtenues à l'étape 2

EDL du premier ordre avec condition initiale L'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) $a(x).y'(x)+b(x).y(x)=f(x)$ possède une infinité de solutions sur I notées : $y_G(x)=y_H(x)+y_p(x)$. Il existe une unique solution y de (E) sur I, vérifiant la condition initiale : $\mathbf{y(x_0)=y_0}$, où x_0 et y_0 sont des valeurs données dans l'énoncé du problème.

Rappels sur les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Résolution On appelle équation différentielle linéaire à coefficients constants toute équation de la forme : (E) $a.y''(x)+b.y'(x)+c.y(x)=f(x)$ (où $a \neq 0$, b et c sont des réels et f est une fonction continue sur I).
Résoudre l'équation (E), c'est rechercher toutes les fonctions y deux fois dérivables sur I et vérifiant (E).
Pour cela, on procède en deux étapes :
Etape 1 : On résout l'équation homogène (ou sans second membre) associée :

$$(E_H)\quad a.y''(x)+b.y'(x)+c.y(x)=0$$

On résout l'équation caractéristique : $a.r^2+b.r+c=0$

- si $\Delta>0$, r_1 et r_2 sont les solutions réelles de l'équation caractéristique et les solutions de (E_H) sont alors $\mathbf{y_H(x)}=\lambda_1 e^{r_1 x}+\lambda_2 e^{r_2 x}$ où λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles.
- si $\Delta=0$, r_1 est solution double de l'équation caractéristique et les solutions de (E_H) sont alors $\mathbf{y_H(x)}= e^{r_1 x}(\lambda_1+\lambda_2 x)$ où λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles.
- si $\Delta<0$, $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\overline{r_1}$ sont les solutions complexes de l'équation caractéristique et les solutions de (E_H) sont alors $y_H(x)=e^{\alpha x}(\lambda_1\cos(\beta x)+\lambda_2\sin(\beta x))$ où λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles.

Etape 2 : On recherche une solution particulière de (E), que l'on note y_p.(voir p.9)
Etape 3 : Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme : $y_G(x)=y_H(x)+y_p(x)$, appelées solutions générales de (E).

Méthode de variation des constantes :
On doit résoudre une l'EDL : (E) $a.y''(x)+b.y'(x)+c.y(x)=f(x)$, pour cela :
Etape 1 : On résout l'équation homogène (ou sans second membre) associée :

$$(E_0)\quad a.y''(x)+b.y'(x)+c.y(x)=0$$

Les solutions de (E_0) sont notées :
$y_0(x)=\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)$ où λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles
Etape 2 : On pose $y(x)=\lambda_1(x)y_1(x)+\lambda_2(x)y_2(x)$ (les constantes λ_1 et λ_2 deviennent des fonctions $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$, et on recherche toutes les fonctions λ_1 et λ_2 telles que y est solution de (E). On démontre que les fonctions λ_1 et λ_2 sont solutions du système : $\begin{cases}\lambda_1'y_1+\lambda_2'y_2=0\\ \lambda_1'y_1'+\lambda_2'y_2'=f\end{cases}$
Conclusion : Les solutions de (E) sont toutes les fonctions y obtenues à l'étape 2.

Résolution d'une équation différentielle du second ordre avec conditions initiales L'équation différentielle linéaire du second ordre (E) $a.y''(x)+b.y'(x)+c.y(x)=f(x)$ possède une infinité de solutions sur I notées : $y_G(x)=y_H(x)+y_p(x)$. Il existe une unique solution y de (E) sur I, vérifiant les conditions initiales : $y(x_0)=y_0$ et $y'(x_0)=y_1$ où x_0, y_0 et y_1 sont des valeurs données dans l'énoncé du problème.

Exercices d'application sur les équations différentielles.

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes

1) $y'+y = x^2$
2) $y'-2y = e^{-3x}(x+1)$ avec y(0)=1
3) $y'-3.y = 18-5\sin(2x)$
4) $y'+x.y = e^{-\frac{x^2}{2}}$
5) $\begin{cases} y'-\dfrac{y}{x} = x^2.\ln x \\ y(1) = 0 \end{cases}$ x>0 .
6) $\begin{cases} y'-y.\tan x = 2\sin x \\ y(\pi) = -1 \end{cases}$
7) $x(2-x)\frac{dy}{dx} + (1-x)y = 1$ sur]0 ;2[
8) $y''-y'-2.y = 6.x^2$
9) $y''+2.y'+5.y = \cos(2x) + 2.\sin(2x)$
10) $\begin{cases} y''-4.y'+3.y = -\dfrac{4}{5}.x.e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
11) On souhaite résoudre : (E) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \ avec\ x > 0$ Pour cela :
   a) On définit la fonction u : $u = y\sqrt{x}$. En déduire y' et y '' , puis montrer qu'alors u est solution d'une EDLCC.
   b) En déduire l'ensemble des solutions de (E)
   c) Quelles sont les solution des (E) dont la limite en 0 est finie ?

Exercice 2 Dans un circuit RC en série, on a l'équation différentielle (E) suivante : $\tau\dfrac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$ où e(t) et s(t) sont les signaux respectivement d'entrée et de sortie et $\tau = RC$
a) Résoudre (E) lorsque e(t) = E où E est une constante. Que se passe-t-il lorsque s(0) = 0 ?
b) Résoudre (E) lorsque e(t) = cos(ωt)où ω est une constante.
Que se passe-t-il lorsque s(0) = 0 ?

Exercice 3 Résoudre l'équation différentielle suivante :
$y''+y = \tan x$
On appliquera la méthode de variation des constantes .