Chapitre 7 : Couple de variables aléatoires

Partie A : X et Y sont des variables aléatoires discrètes

I. Loi conjointe, lois marginales :

1) Définition :

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur un même univers probabilisé $\{S, P(S), p\}$.
On note X(S)=$\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ et Y(S)=$\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$.
On appelle loi conjointe du couple (X,Y), l'application p de X(S)×Y(S) dans [0,1], qui au couple (x_i, y_j) associe la probabilité $p((X=x_i)\cap(Y=y_j)) = p_{ij}$
On appelle première loi marginale, l'application de X(S) dans [0,1], qui à x_i associe la probabilité $p((X=x_i)) = p_{i.}$
On appelle deuxième loi marginale, l'application de Y(S) dans [0,1], qui à y_j associe la probabilité $p((Y= y_j)) = p_{.j}$

2) Propriété :

$\forall i \in \mathbb{N}, \sum_j p_{ij}$ = ……………

$\forall j \in \mathbb{N}, \sum_i p_{ij}$ = …………

$\sum_i p_{i.}$ = ………………………………………………………………………………………

3) Exemples

✓ Exemple 1 : Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est telle que, si i et j sont deux entiers tels que $0 \le i \le 2$ et $-i \le j \le i$, $P\{ (X, Y) = (i, j) \} = \frac{1}{9}$
Compléter le tableau ci-dessous :

X/Y						**$p_{i.}$**
$p_{.j}$						

✓ Exemple 2 : On tire 3 cartes d'un jeu de 32. Soit X le nombre de coeurs et Y le nombre de brelans (3 cartes de même figure).
Compléter le tableau des probabilités suivant :

X / Y			**$P_{i.}$**
$p_{.j}$			

II. Lois conditionnelles, indépendance :

1) Définitions :

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé. On appelle loi conditionnelle de X sachant (Y=y_j) (si $p_{.j} \neq 0$) l'application de X(S) dans [0,1] qui à tout x_i associe $p(X=x_i / Y=y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$
On appelle loi conditionnelle de Y sachant (X=x_i) (si $p_{i.} \neq 0$) l'application de Y(S) dans [0,1] qui à tout y_j associe $p(Y=y_j / X=x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$
Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si et seulement si :
$p((X=x_i)\cap(Y=y_j)) = p(X=x_i)\times p(Y=y_j))$ ou encore : $p_{ij} = p_{i.} \times p_{.j}$

2) Exemples

✓ Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi donnée par :
P{ (X, Y) = (-1, 0) } = P{ (X, Y) = (1, 0) } = P{ (X, Y) = (0, -1) } = P{ (X, Y) = (0, 1) } = 1/4
X et Y sont-elles indépendantes ?

……

……

……

……

✓ même question avec l'exemple 1 du paragraphe I.

……

……

✓ même question avec l'exemple 2 du paragraphe I.

……

……

✓ Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement deux boules de cette urne.

Soit X_k la variable aléatoire du $k^{\text{ième}}$ tirage avec k = 1 ou 2 et :

$$X_k = \begin{cases} 0 \text{ si le } k^{\text{ième}} \text{ tirage est blanc} \\ 1 \text{ si le } k^{\text{ième}} \text{ tirage est noir} \end{cases}$$

Compléter les tableaux suivants :

a) Tirage avec remise

X_1 / X_2			$P_{i.}$
$p_{.j}$			

b) Tirage sans remise

X_1 / X_2			$P_{i.}$
$p_{.j}$			

Déterminer l'indépendance des deux variables dans les deux cas, puis calculer la probabilité pour que la deuxième boule soit blanche sachant que la première l'est.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. Loi d'une somme, d'un produit :

1) Loi d'une somme ou d'un produit

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé et la variable aléatoire Z, définie par : Z=X+Y. Soit z∈Z(S), alors :

P(Z=z) = $\mathbf{p}\left(\bigcup_{x_i+y_j=z}(X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$**. Il en est de même lorsque Z = X.Y**

Si de plus X et Y sont indépendantes, alors :

P(Z=z) = $\sum_{x_i+y_j=z} \mathbf{p}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = \sum_{x_i+y_j=z} \mathbf{p}(X = x_i) \times \mathbf{p}(Y = y_j)$

2) Exemple

On jette deux dés bien équilibrés et on s'intéresse aux variables aléatoires :
X est la somme des points obtenus et Y le produit.
Déterminer P((X,Y) = (8,6)). X et Y sont-elles indépendantes ?
Calculer P((X,Y) = (2,1)).

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Remarque E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y),
en particulier pour a = b = 1 : E(X+Y) = E(X) + E(Y).

IV. Covariance :

Le but de ce paragraphe est d'étudier le lien entre deux variables aléatoires.

1) Définition

Soient X et Y deux v.a. On appelle covariance X et Y le réel
σ_{XY} = cov(X,Y) = E[(X - E(X)).(Y - E(Y))]

2) Propriétés

1) cov(X,Y) = E(XY) – E(X)E(Y)   2) cov(X,Y) = cov(Y,X)   3) cov(X,X) = σ_X^2 = var(X)
4) cov(aX+bY , Z) = a cov(X,Z) + b cov(Y,Z)
5) Var(X+Y) = Var(X) + 2cov(X,Y) + Var(Y)
6) Si X et Y sont indépendants alors cov(X,Y) = 0
(attention : cov(X,Y) = 0 n'implique pas nécessairement X et Y sont indépendants)

En effet,

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……

……

……

……

<u>Conséquences</u>

- ✓ Si X et Y sont indépendantes alors E(XY) = E(X)E(Y)
- ✓ Si X et Y sont indépendantes alors Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)

3) <u>Exemple</u>

On place au hasard deux billes rouge et verte dans deux boites A et B. On note X, la variable aléatoire « nombre de billes dans la boite A » et Y, la variable aléatoire « nombre de boites vides ».
Construire les tableaux des lois de probabilité de (X, Y), XY et X+Y :

X/Y				

XY					

X+Y					

Calculer la covariance de (X,Y), l'espérance de X, Y, XY et la variance de X , Y et X+Y.
Conclure.

……

……

……

……

……

……

……

V. <u>Coefficient de corrélation</u> :

1) <u>Définition</u>

Soient X et Y des variables aléatoires de moyennes finies et de variances non nulles. Le coefficient de corrélation de X et Y est alors : $\boldsymbol{\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y}}$ **.**

2) <u>Approximation linéaire</u>

- ✓ $\boxed{\boldsymbol{-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1}}$

En effet,

……

……

……

……

- ✓ **ρ (X, Y) = 1 si et seulement si il existe a > 0 et b réel tel que Y = aX + b**
  ρ (X, Y) = -1 si et seulement si il existe a < 0 et b réel tel que Y = aX + b.
  De plus, $\boldsymbol{a = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)}}$ **et b = E[Y] – a.E[X]**

En effet,

……

……

……

……

Remarque si $\rho(X,Y)$ est proche de 1 ou -1, alors c'est que X et Y prennent des valeurs « peu » dispersées par rapport à une relation linéaire affine et on pourra supposer que c'est le cas. On a donc à peu près $Y \cong aX + b$.
De plus, si $\rho(X,Y)$ est proche de 1 alors $a > 0$ et si $\rho(X,Y)$ est proche de -1 alors $a < 0$.

Exercice Datation par le carbone 14
Le carbone radioactif ^{14}C est produit dans l'atmosphère par l'effet des rayons cosmiques sur l'azote atmosphérique. Il est oxydé en $^{14}CO_2$ et absorbé sous cette forme par les organismes vivants qui, par suite, contiennent un certain pourcentage de carbone radioactif par rapport aux carbone ^{12}C et ^{13}C qui sont stables.
On suppose que, lorqu'un organisme meurt, ses échanges avec l'atmosphère cessent et que la radioactivité due au carbone ^{14}C décroît suivant une loi exponentielle :
(*) $A = Ao\, e^{-\lambda t}$
λ étant une constante positive, t étant le temps exprimé en années et A étant la radioactivité exprimée en nombre de désintégrations par minute et par gramme de carbone.
Un étalonnage de la méthode a été réalisé par l'analyse de troncs de très vieux arbres, des Séquoias géants et des pins aristaca. Par un prélèvement effectué sur le tronc, on peut obtenir son âge t, en années en comptant le nombre des anneaux de croissance et sa radioactivité A en mesurant le nombre de désintégrations. On a ainsi obtenu :

t	500	1000	2000	3000	4000	5000	6300
A	14.5	13.5	12.0	10.8	9.9	8.9	8.0

La relation (*) entre t et A ne peut pas être vérifiée exactement par tous les couples de valeurs ainsi mesurées, mais elle l'est en principe aux erreurs de mesure aléatoires près.
Comment proposez-vous d'évaluer les constantes Ao et λ ? (On pourra penser à faire une régression de ln(A) sur t).

Partie B : X et Y sont des variables aléatoires continues

I. Loi conjointe, lois marginales :

1) Définition :

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles continues de loi de densité f (appelée aussi loi conjointe du couple (X,Y)), alors : $\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{f(x,y)dxdy = 1}$

$\mathbf{p\big((X,Y) \in [a,b] \times [c,d]\big) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = p\big((a <} X < b) \cap (\mathbf{c} < X < d)\big)$

La première loi marginale est définie par : $\mathbf{f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy}$

La deuxième loi marginale est définie par : $\mathbf{f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx}$

2) Propriété :

$\int_a^b f_X(x)dx =$ …………………………..

$\int_c^d f_Y(y)dy =$ …………………………..

$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx =$ ……………………………………………………………………………………

3) Exemples

- ✓ Pré-recquis : On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle [a,b], lorsque la densité de probabilité est définie par :

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On note cette loi : $\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}$. Montrer que f est bien une densité de probabilité, calculer l'espérance mathématique de X.

………

………

………

- ✓ Exemple 1 : Soit $f(x,y) = \frac{1}{3}\mathbf{1}_{[0,1]\times[-1,2]}(x,y)$

Montrer que f est une densité de probabilité :

………

………

Considérons un couple (X; Y) de loi de densité f. La loi de X est alors de densité donnée par :

……

……

De même La loi de Y est alors de densité donnée par : ………………………………………...

- ✓ Exemple 2 : Soit $f(x,y) = \frac{1}{3\pi} e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{6}}$

Montrer que f est une densité de probabilité :

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Considérons un couple (X; Y) de loi de densité f. La loi de X est alors de densité donnée par :

……

……

……

……

……

……

……

De même La loi de Y est alors de densité donnée par : ………………………………………...

……

……

……

……

……

……

……

II. Lois conditionnelles, indépendance :

1) Définitions :

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires continues.
On appelle densité de probabilité conditionnelle de X sachant (Y=y) la fonction $\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ **si** $f_X(x) \neq 0$
On appelle densité de probabilité conditionnelle de Y sachant (X=x) la fonction $\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ **si** $f_Y(y) \neq 0$
Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si et seulement si :
$f(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$ **pour tout x et tout y.**

2) Exemples

✓ Les variables aléatoires X et Y de l'exemple 1 du paragraphe I. sont-elles indépendantes ?

……

……

……

……

✓ Les variables aléatoires X et Y de l'exemple 2 du paragraphe I. sont-elles indépendantes ?

………

………

………

………

III. Exercices :

Exercice 1 Deux personnes se donnent rendez-vous entre 9 h et 11 h, et décident de ne pas s'attendre plus de 15 mn. Leurs heures d'arrivée au rendez-vous, X et Y, sont indépendantes et de densité constante sur l'intervalle [9 , 11].
1 - Quelle est la densité de X ?

2 - Quelle est la densité de (X , Y) ?

3 - Quelle est la probabilité que les deux personnes se rencontrent ?

Exercice 2 La durée de vie (en jours) d'un insecte d'une espèce donnée est une variable aléatoire de fonction de répartition : $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-kx} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

k est un paramètre pouvant prendre 2 valeurs différentes selon qu'il s'agit d'un mâle ou d'une femelle.

1 - De nombreuses observations ont permis d'établir que la probabilité pour qu'un insecte mâle vive plus de 150 jours est de 0.619. Cette probabilité est de 0.524 pour une femelle. Quelle est donc la valeur de k pour un mâle ? et pour une femelle ? (résultats avec 4 décimales)

2 - En supposant que les durées de vie, X et Y, d'un insecte mâle et d'un insecte femelle sont indépendantes, quelle est la probabilité pour que le mâle vive entre 100 et 200 jours, et la femelle entre 150 et 300 jours ?

Exercice 3   Soit X une variable aléatoire discrète de loi de probabilité

x_i	1	2	3	4
p_i	0.2	0.4	0.3	0.1

Soit Y une variable aléatoire continue telle que la loi conditionnelle de Y sachant X = x est uniforme sur [0 , x] (c'est-à-dire de densité constante sur [0 , x]) pour tout x de { 1 , 2 , 3 , 4 } .

1 - Calculer : P (Y < 2 / X = 3) , P [(Y < 2) ∩ (X = 3)] , P (Y < 2)

2 - X et Y sont-elles indépendantes ?

Méfions-nous cependant : le fait que le coefficient de corrélation de X et Y est nul ne signifie pas du tout que X et Y sont indépendantes (…qu'il n'y a pas de corrélation entre X et Y…).

P.16-17 probaL3 La Rochelle

Prenons par exemple une variable X de loi symétrique par rapport à 0 (par exemple de loi uniforme sur [-1, 1]), et posons $Y = X^2$. La loi de $XY = X^3$ est aussi symétrique par rapport à 0. Ainsi, $E(XY) = 0 = E(X)\, E(Y)$, et donc $\rho\,(X, Y) = 0$. Pourtant, X et Y ne sont pas (du tout) indépendantes, puisqu'au contraire, la donnée de la valeur prise par X détermine complètement la valeur prise par Y.

exercices
http://www.agro-montpellier.fr/cnam-lr/statnet/mod4/Lec3/M4L3_INT.htm