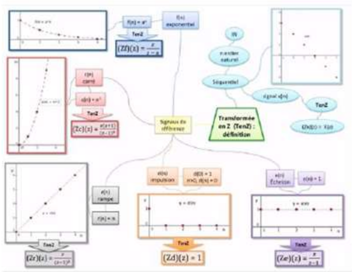
TD1 Transformation en Z.

- <u>Consignes à suivre pour les TD à distance</u> :

UNIVERSITE DE TOULON
IUT DE TOULON
DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques
Chapitre 2 : Transformation en Z



- Prenez des notes, cherchez les exercices, soyez actif devant vos écrans !

- Travaillez à votre rythme ! N'hésitez pas à mettre sur pause la vidéo, revenir en arrière…

- Si vous avez des questions, contactez-moi par mail ou tchatt moodle ou discord, je vous répondrai en dehors de mes créneaux de cours.

- Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des opportunités d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter !

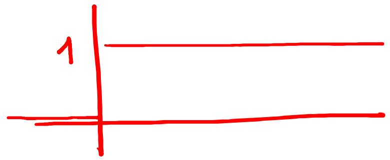
- <u>Programme de la séance</u> :

- Définition de la transformation en Z et calculs de transformée de signaux usuels.

Rappel sur la transformation de Laplace :

TABLEAU DE TRANSFORMEES DE LAPLACE

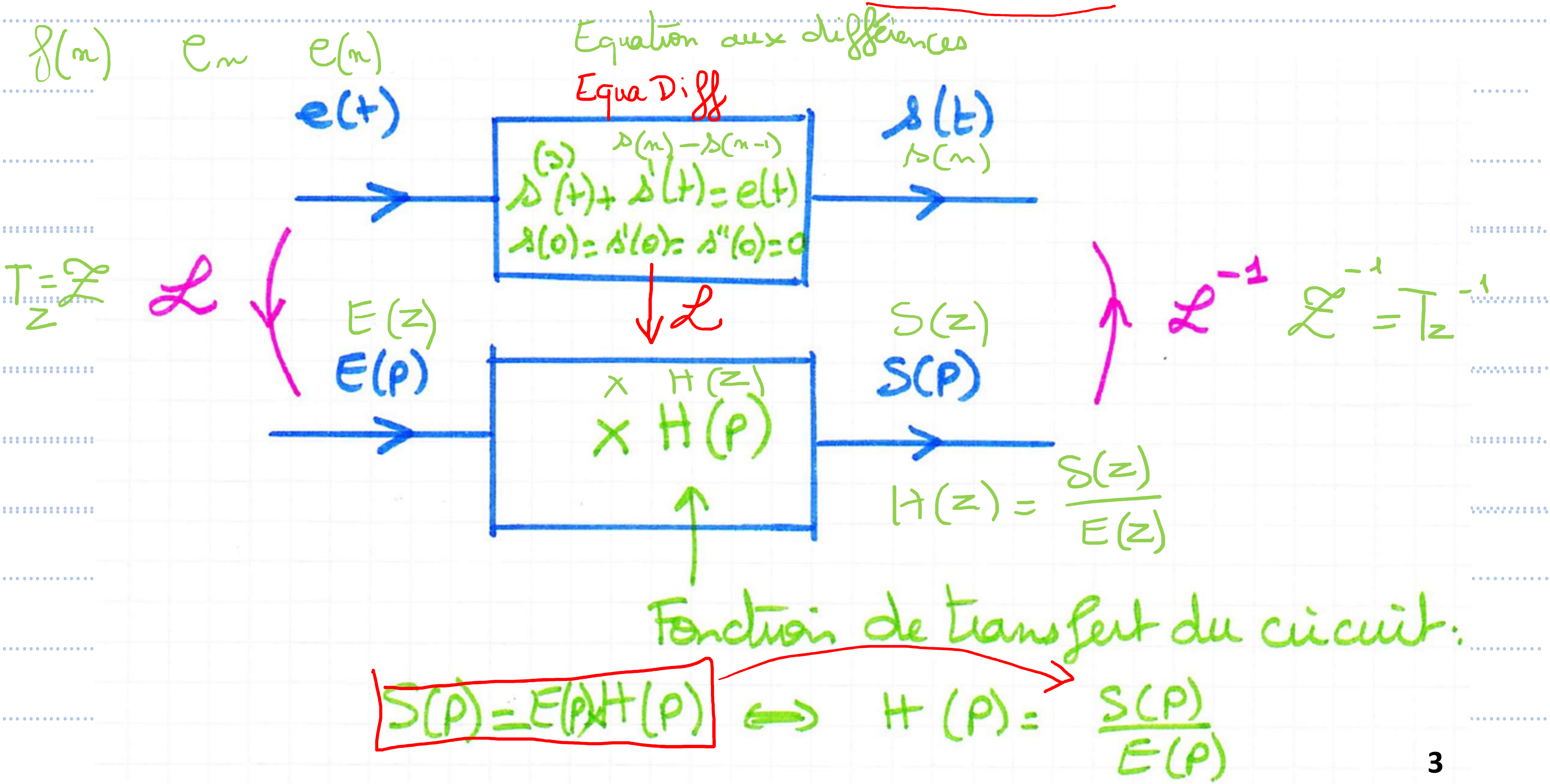
Définition $\mathcal{L}[f(t).\underbrace{U(t)}_{=0 \text{ si } t<0}]=F(p)=\int_{0}^{+\infty} f(t).e^{-pt}.dt$



Signaux usuels

f, fonction causale	$\mathcal{L}[f(t)]$ ou $F(p)$
$\delta(t)$	1
$U(t)$ ou 1	$\frac{1}{p}$
$t^n.U(t)$ ou t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos(\omega t).U(t)$ ou $\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t).U(t)$ ou $\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at}.U(t)$ ou e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$e^{-at}.\ t^n.U(t)$ ou $e^{-at}.\ t^n$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\cos(\omega t).e^{-at}.U(t)$ ou $\cos(\omega t).e^{-at}$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t).e^{-at}.U(t)$ ou $\sin(\omega t).e^{-at}$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

Rappel sur la transformation de Laplace : elle s'applique sur des signaux analogiques (dont la variable t est continue)



Transformation en Z

Chapitre 2 page 3

I. Définitions et exemples :

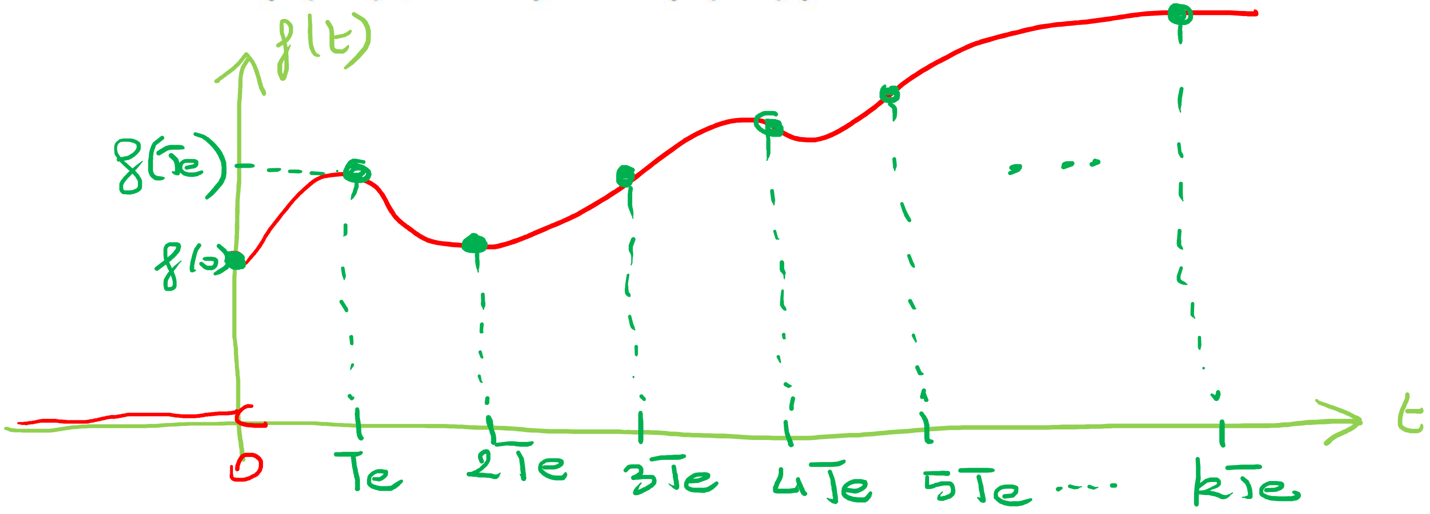
1) Séquence numérique

$f(t) = 0 \;\; \forall\, t < 0$

Soit f, une fonction causale et T_e>0, on appelle séquence numérique associée à f la suite des valeurs obtenues par échantillonnage de f selon la période T_e :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ k &\mapsto f(kT_e) \end{aligned}$$

On notera : $f_e = \{ f(kT_e) \, ; \, k \in \mathbb{N} \}$ ou $f_e = \{ f(kT_e) \}$



f_e est aussi appelée fonction échantillonnée de f, T_e la période d'échantillonnage, et $f(kT_e)$ est l'échantillon de rang k.

Rappel sur la transformation de Laplace :

TABLEAU DE TRANSFORMEES DE LAPLACE

Définition $\mathcal{L}[f(t).U(t)]=F(p)=\int_{0}^{+\infty} f(t).e^{-pt}.dt$

$$\mathcal{Z}(f(kTe).U(kTe)) = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kTe)\, z^{-k} \; ; \; z \in \mathbb{C}$$

Signaux usuels

f, fonction causale	$\mathcal{L}[f(t)]$ ou $F(p)$
$\delta(t)$	1
$U(t)$ ou 1	$\frac{1}{p}$
$t^n.U(t)$ ou t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos(\omega t).U(t)$ ou $\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t).U(t)$ ou $\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at}.U(t)$ ou e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$e^{-at}.t^n.U(t)$ ou $e^{-at}.t^n$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\cos(\omega t).e^{-at}.U(t)$ ou $\cos(\omega t).e^{-at}$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t).e^{-at}.U(t)$ ou $\sin(\omega t).e^{-at}$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

2) Transformée en Z .

Soit f_e={ $f(kT_e)$ }, une séquence échantillonnée, on appelle transformée en Z de f_e la fonction F de la variable complexe z définie par : $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)\, z^{-k}$

$\mathcal{Z} = T_Z$

On note : F=TZ(f_e) ou encore F(z)=TZ({ $f(kT_e)$}).
D_F est l'ensemble de définition F, c'est l'ensemble des nombres complexe z pour lesquels la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)\, z^{-k}$ **converge.**
On admet que F est infiniment dérivable sur D_F .

Rappel Suite géométrique de raison a : $(a^k)_k$

$\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$

$\lim_{k\to\infty} a^k =$ ....

Exple : a = 2 $\quad 2^k \quad 2^0 = 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32$ etc... $\lim_{k\to+\infty} 2^k = +\infty$

$a = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^k} \quad 1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{16} ; \frac{1}{32}$ etc... $\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0$

diverge

$a = -\frac{1}{2} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(-1)^k}{2^k} \quad 1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; -\frac{1}{8} ; \frac{1}{16} ; -\frac{1}{32}$ etc...

$\lim_{k\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 0$

$a = -2 \quad (-2)^k \quad 1 ; -2 ; 4 ; -8 ; 16 ; -32$ etc...

- $a = 1 \quad (a^k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$ $\quad$ −8, −2, 0, 1, 4 $\to \mathbb{R}$ $\quad \lim_{k\to+\infty} (-2)^k$ n'existe pas
- $a > 1 \quad (a^k) \nearrow \quad a^k = e^{\ln a^k} = e^{\underbrace{k \ln a}_{>0}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$
- $a \leq -1 \quad (a^k)$ lim a^k n'existe

(a^k) diverge

$-1 < a < 1 \iff |a| < 1$

$|a^k| \searrow$ alors $\lim |a^k| = 0$

<u>Rappel</u> Suite géométrique de raison a : $(a^k)_k$

$\lim\limits_{k\to\infty} a^k = 0 \Leftrightarrow |a| < 1$ si $|a| > 1$ alors (a^k) diverge.

Série géométrique de raison a : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k$

$\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ si $a \neq 1$

$(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n)\times(1-a) = 1+\cancel{a}+\cancel{a^2}+\cdots+\cancel{a^n}-\cancel{a}-\cancel{a^2}-\cancel{a^3}-\cdots-a^{n+1}$

$(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n)\times(1-a) = 1-a^{n+1}$

$1+a+a^2+\cdots+a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ si $a \neq 1$

<u>Rappel</u> Suite géométrique de raison a : $(a^k)_k$

$\lim_{k\to\infty} a^k = 0 \iff |a| < 1$ ⊗ si $|a| > 1$ alors (a^k) diverge.

Série géométrique de raison a : $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$

$\sum_{k=0}^{n} a^k = a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ si $a \neq 1$ ⊗

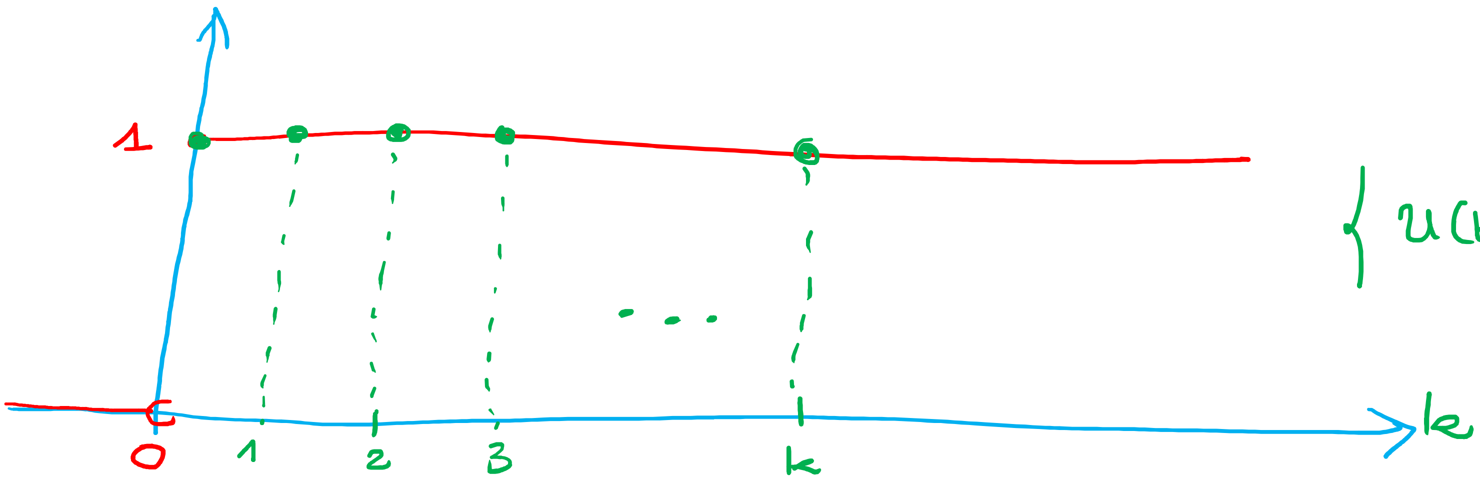
$\underline{\underline{a \neq 1}}$ $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1}{1-a} \iff |a| < 1}$

Chapitre 2 page 5

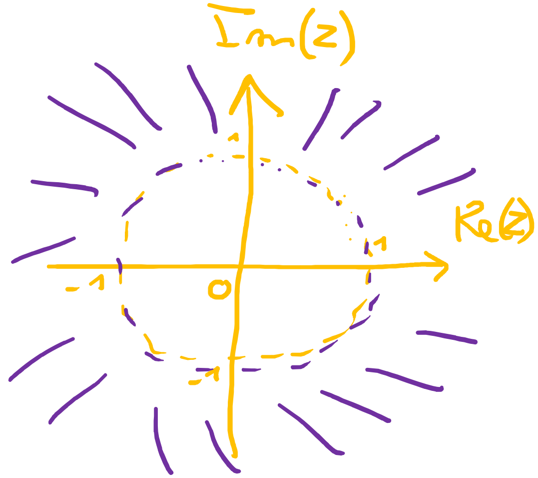
3) Transformée en Z de séquences usuelles

- Suite échelon unité : en supposant $T_e=1$, $U_e=\{U(k)\ ;\ k\in\mathbb{N}\}$

U(k)= $1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$



$\{u(k)\}$.



Donc F(z)=

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k).z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\underbrace{z^{-1}}_{a}\right)^k = \frac{1}{1-a} \text{ ssi } |a|<1$$

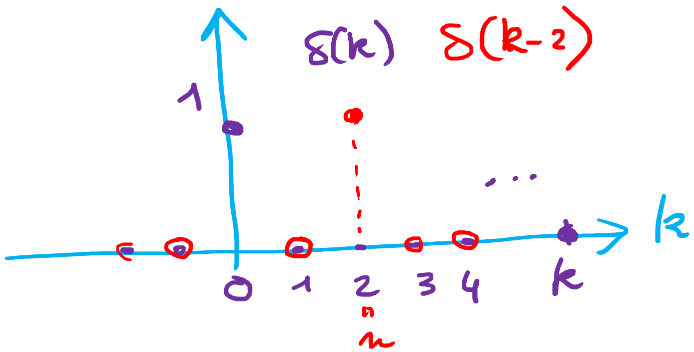
$$\left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$T_Z(u(k)) = \frac{1\times z}{(1-z^{-1})\times z} \quad \text{ssi } |z^{-1}|<1$$

$$\boxed{T_Z(u(k)) = T_Z(1) = \frac{z}{z-1} \quad \text{ssi } |z|>1}$$

- Suite de Dirac : en supposant T_e=1, la suite de Dirac, notée δ est définie par :

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ si } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$



Donc F(z)= $\sum_{k=0}^{\infty} f(k).z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k).z^{-k} = \delta(0).z^{0} = 1$

$T_z(\delta(k)) = 1$

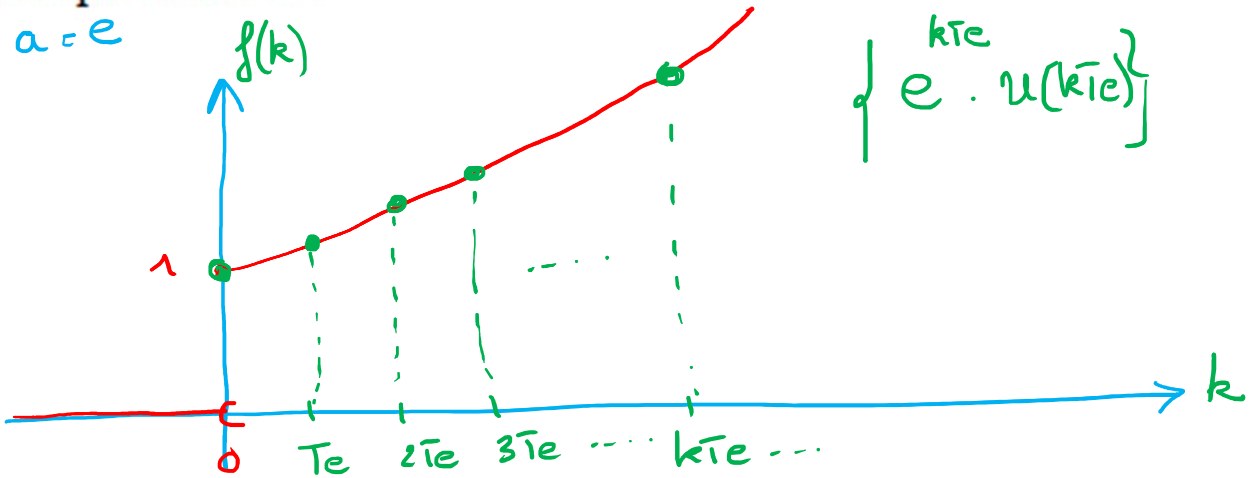
- Suite de Dirac retardé : en supposant T_e=1, la suite de Dirac retardée de n, notée δ_n est définie par : $\delta_n(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ si } k \neq n \end{cases}$

Donc F(z)= $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-n).z^{-k} = \delta(n-n).z^{-n} = \delta(0).z^{-n} = z^{-n}$ donc $T_z(\delta(k-n)) = z^{-n}$

- Suite exponentielle : Soit $f(x) = a^x.U(x)$ $a \in \mathbb{C}$ alors $f_e = \{a^{kT_e}.U(kT_e)\}$ est la séquence numérique associée.

Chapitre 2 page 7

Exple $a = e$



$\left\{ e^{kTe} \cdot u(kTe) \right\}$

$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$; $|a| < 1$

Donc F(z)= $\sum_{k=0}^{\infty} f(kTe) . z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{kTe} . \underbrace{u(kTe)}_{1} . z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{kTe} . z^{-k}$

$\frac{|a^{Te}|}{|z|} < 1$

$\boxed{Tz(a^{kTe}) = \frac{z}{z - a^{Te}} \ ; \ |z| > |a^{Te}|}$

$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{Te} . z^{-1})^k = \frac{1 \times z}{(1 - a^{Te} . z^{-1}) \times z}$ si $|a^{Te} . z^{-1}| < 1$

En particulier si T_e=1 : $Tz(a^k) = \frac{z}{z-a}$ si $|z| > |a|$