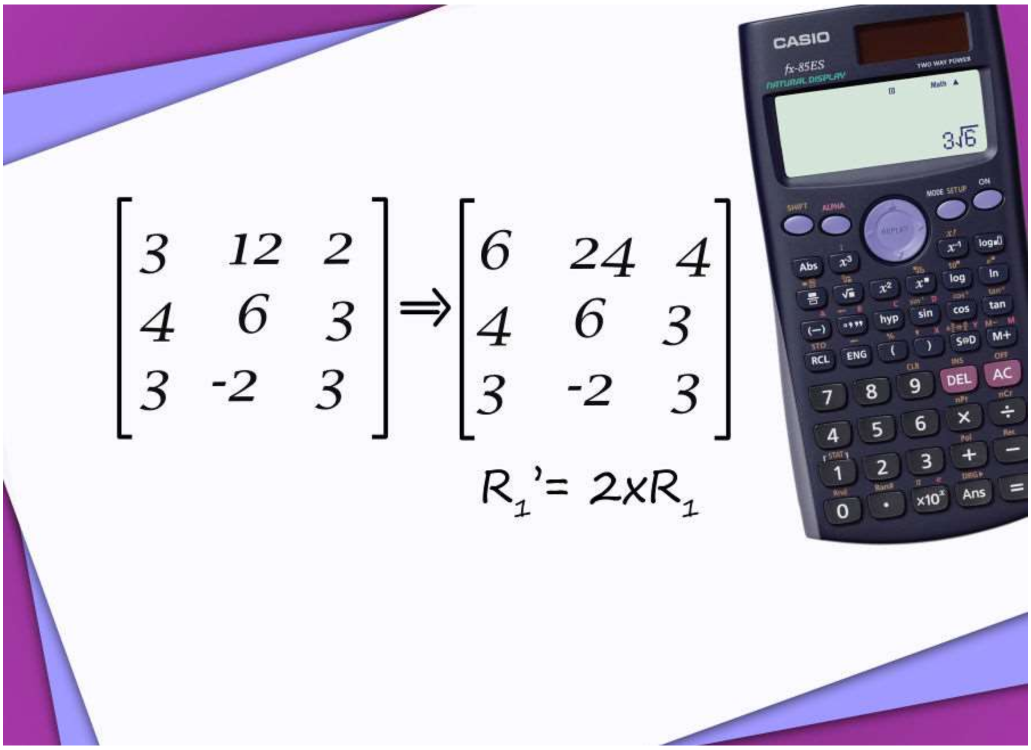
UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

TD / TP d'Outils Logiciels semestre 3

Calcul matriciel, diagonalisation d'une matrice et applications



Enseignant : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

Partie I : Calcul matriciel

I. Définition - Opérations

1) Introduction

On peut faire appel au calcul matriciel pour résoudre un système de n équations à n inconnues.
Exemple : On souhaite résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues x_1, x_2, x_3 suivant :

$$(S)\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Pour cela, on note A, le tableau des coefficients de x_1, x_2, x_3

A=

A est appelée matrice à 3 lignes et 3 colonnes, ou matrice carrée d'ordre 3. A est un élément de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on note :

…………………………………………………………………………………………………...

On note V le vecteur constitué par les 3 inconnues, et B le vecteur, second membre du système :

V= B=

On peut alors écrire le système (S) de la façon suivante :

On cherche le vecteur V, tel que $A \times V = B$. Si la matrice A est inversible, on note A^{-1}, sa matrice inverse et on obtient alors : $V = A^{-1} \times B$

TP : A l'aide du logiciel Maxima, déterminer A^{-1} et le vecteur V solution de l'équation :

....

....

....

....

2) Définitions **K=ℝ ou K=ℂ**

On appelle matrice carrée d'ordre n, tout tableau de valeurs à n lignes et n colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$$

On note M(n, K), l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.
On a alors : $A \in$ M(n, K)

remarque importante : Dans l'écriture a_{ij} , i indique la ligne et j la colonne.

3) Opérations

✓ Egalité

Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ deux matrices carrées d'ordre n.
A=B si et seulement si $\forall\ 1 \le i, j \le n \quad a_{ij} = b_{ij}$.

✓ Addition

Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ deux matrices carrées d'ordre n.
$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$
$A \in$ M(n, K) et $B \in$ M(n, K) donc $A+B \in$ M(n, K)

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ alors A+B =

TP : Vérifier ce résultat à l'aide du logiciel Maxima.

Remarques : - On ne peut additionner que des matrices de mêmes dimensions (même nombre de lignes et même nombre de colonnes.)

- Soient A, B, C trois matrices de mêmes dimensions. A+B=B+A et (A+B)+C=A+(B+C). Si on note O la matrice ne contenant que des zéros de mêmes dimensions que A, on a : A+O=A. Si on note $-A=(-a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, on a : A+(-A)=O.

- ✓ Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soit $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice carrée d'ordre n, et λ un scalaire réel ou complexe (un nombre réel ou complexe)
$\lambda.A=(\lambda.a_{ij})_{1\le i,j\le n}$
$A\in M(n,K)$ et $\lambda\in K$ donc $\lambda.A\in M(n,K)$

Exemple : $A=\begin{pmatrix}5j & 1 & -1\\ j & 2 & 3\\ 0 & j & 0\end{pmatrix}$ et λ=j alors $\lambda.A=$

TP : Vérifier ce résultat à l'aide du logiciel Maxima.

Remarques - L'écriture $A\lambda$ n'existe pas.

- Si λ et μ sont deux scalaires de K, A et B deux matrices de mêmes dimensions à coefficients dans K, alors :

$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B,\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A,\ \lambda(\mu A)=\lambda\mu A,\ 0A=O$.

- ✓ Multiplication d'une matrice et d'un vecteur

Soit $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice carrée d'ordre n, et $V=(x_i)_{1\le i\le n}$ un vecteur à n composantes réelles ou complexes.

$$\mathbf{A.V}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n\\ \dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i\right)_{1\le i\le n}$$

A.V est un vecteur à n composantes.

Exemple $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$ alors AV=

TP : Vérifier ce résultat à l'aide du logiciel Maxima.

Remarques - On ne peut faire le produit d'une matrice et d'un vecteur que si le nombre de composantes du vecteur est égal à l'ordre de la matrice.

- V.A est impossible.

Application Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, un vecteur du plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit α un angle. Cherchons $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, les coordonnée du vecteur W, obtenu en effectuant la rotation d'angle α du vecteur V.

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

- ✓ Produit de deux matrices

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ deux matrices carrées d'ordre n.
Le produit $A \times B$ est une matrice carrée d'ordre n définie par :
$A \times B = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \forall\ 1 \le i, j \le n$

En pratique On dispose la matrice A sous la matrice B, de la façon suivante :

$A \times B =$

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \times B =$

$B \times A =$

TP : Vérifier ces résutats à l'aide du logiciel Maxima.

Remarques En général $A \times B \neq B \times A$

Exercice Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & x & y \end{pmatrix}$ où x et y sont deux réels. Pour quelles valeurs de x et y a-t-on $A \times B = B \times A$? Donner alors la matrice $A \times B$.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Cas particulier

On appelle matrice Identité d'ordre n, la matrice I_n définie par :

On note : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$I_n \in$ M(n, K)

Si A est une matrice carrée d'ordre n, alors $A \times I_n = I_n \times A = A$

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer :

$A \times I_3 =$

$I_3 \times A =$

4) Matrice carrée inversible

Une matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans K est dite inversible (ou régulière) lorsqu'il existe une matrice B carrée d'ordre n, à coefficients dans K telle que :

$$\mathbf{A \times B = B \times A = I_n}$$

La matrice B est alors unique, elle est appelée matrice inverse de A et est notée A^{-1}.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer, si c'est possible A^{-1}.

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

TP : Vérifier ce résultat à l'aide du logiciel Maxima.

Exercice suite de l'exemple précédent. Soit $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Calculer B^2+B et en déduire que B est inversible ainsi que la matrice B^{-1}. Calculer A.B, $(A.B)^{-1}$, $B^{-1}.A^{-1}$. Comparer les deux derniers résultats obtenus.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

TP : Vérifier ces résultats à l'aide du logiciel Maxima.

II. Déterminant d'une matrice carrée

1) Matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$. On appelle déterminant de la matrice A et on note det(A) ou $|A|$ le scalaire défini par : det(A)= $|A|$=ad-bc.

Exemple Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

2) Matrice carrée d'ordre n>2

On appelle mineur d'indice (i,j) d'une matrice $A \in M_n(K)$ et on note Δ_{ij}, le déterminant de la matrice d'ordre n-1 obtenue en barrant la i^{ème} ligne et la j^{ème} colonne de A.
On appelle cofacteur d'indice (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ une matrice carrée d'ordre n, on calcule le déterminant de A de plusieurs façons différentes :

- **En développant par rapport à la i^{ème} ligne : $\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\Delta_{ij}a_{ij}$**
- **En développant par rapport à la j^{ème} colonne : $\det A = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\Delta_{ij}a_{ij}$**

Exemples

- ✓ Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ précédemment citée, en développant par rapport à la 1re ligne, puis par rapport à la 2ème colonne.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………

- ✓ Calculer le déterminant de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ précédemment citée, en développant par rapport à la 3ème ligne :

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………

- ✓ Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, calculer $|C|$.

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...

✓ Soit $D = \begin{pmatrix} 110 & 2 & 15 & 8 \\ 0 & 12 & 20 & 7 \\ 0 & 0 & 30 & 56 \\ 0 & 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$, calculer $|D|$.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

TP : Vérifier ces résultats à l'aide du logiciel Maxima.

Remarques

- ✓ En pratique, on choisira de développer le déterminant d'une matrice par rapport à la ligne ou la colonne comportant le plus de zéros.
- ✓ Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients de sa diagonale.

3) Propriétés

Soit A, B deux matrices carrées de même ordre.
det(AB)=detA.detB ; det (^tA)=detA.

III. Calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible

1) Définitions - théorème

- **On appelle matrice transposée d'une matrice carrée d'ordre n $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ la matrice carrée d'ordre n notée ^tA définie par : $^tA = (a_{ji})_{1\le j,i\le n}$.**
- **On appelle mineur d'indice (i,j) d'une matrice $A \in M_n(K)$ et on note Δ_{ij}, le déterminant de la matrice d'ordre n-1 obtenue en barrant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de A.**
- **On appelle cofacteur d'indice (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$**
- **On appelle comatrice d'une matrice $A \in M_n(K)$ et on note CoA, la matrice transposée de la matrice des cofacteurs : $CoA = \left((-1)^{i+j}\Delta_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$**

Définition Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est dite inversible (ou régulière) lorsqu'il existe une matrice B carrée d'ordre n, à coefficients dans K telle que : $A.B=B.A=I_n$

La matrice B est alors unique, elle est appelée matrice inverse de A et est notée A^{-1}.

<u>Théorème</u> A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, on a alors : $A^{-1} = \dfrac{{}^{t}CoA}{\det A}$

<u>Exemples</u>

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tel que $ad\text{-}bc \neq 0$. Calculer, si c'est possible A^{-1}.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

TP : Vérifier le résultat avec le logiciel Maxima en affichant $A \times A^{-1}$ et $A^{-1} \times A$.

- Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer, si c'est possible C^{-1} , et vérifier le résultat.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

TP : Vérifier le résultat avec le logiciel Maxima en affichant $C \times C^{-1}$ et $C^{-1} \times C$.

2) Propriété

Soit A, B deux matrices carrées de même ordre. $(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$

3) Application

Système d'équations linéaires et calcul matriciel

Soit le système $S_n \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$.

Soit les matrices ; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On peut écrire : $B=AX$, et $X=A^{-1}B$.
On résoudra donc le système en écrivant sa matrice A, en déterminant l'inverse A^{-1} , puis en effectuant le produit $A^{-1}B$. Ceci suppose que A est inversible, c'est à dire que $\det A \neq 0$.
Le système S_n possède donc une unique solution si et seulement si $\det A \neq 0$.

Remarque Cette méthode n'a évidemment aucun intérêt pour résoudre des systèmes numériques simples.

<u>Exemple</u> Soit le système : $S\begin{cases}2x+y-z=4\\ x-2y+z=-1\\ -x+2y+2z=-5\end{cases}$. Résoudre S. (On vérifiera les calculs intermédiaires à l’aide du logiciel Maxima)

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

TP : A l'aide du logiciel Maxima, résoudre le système (S) suivant :

$$(S)\begin{cases} X + 2Y + 3Z - T + V = 1 \\ X + 2Y + Z - U + V = 0 \\ Y + Z + 2T - 2U = 1 \\ Y + 3Z + 2T + U + V = -1 \\ 2X - 3Y + Z + 2T + 4U + 2V = 0 \\ X + 2Y + 2Z - U + V = 1 \end{cases}$$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

Partie II : Diagonalisation d'une matrice

I. Définitions

1) Valeurs propres d'une matrice carrée

Soit A, une matrice carrée d'ordre n. On appelle valeurs propres de A, les solutions λ de l'équation dite caractéristique suivante : det(A-λ Id)=0.
Cette équation, étant un polynôme de degré n, possède n solutions complexes.
Une matrice carrée d'ordre n, possède donc n valeurs propres complexes.

2) Vecteurs propres d'une matrice carrée

Soit A, une matrice carrée d'ordre n. Soit λ , une valeur propre simple de A. On appelle vecteur propre associé à la valeur propre λ , un vecteur V, solution de l'équation : $(A-\lambda I_n)(V)=0$.

3) Matrice de diagonalisation

Soit A, une matrice carrée d'ordre n, possédant n valeurs propres simples. On appelle matrice de diagonalisation, la matrice P, dont les colonnes sont les n vecteurs propres de la matrice A.
La matrice A est alors dite diagonalisable et on obtient alors l'égalité suivante :
$D = P^{-1}AP$ où D est la matrice diagonale, dont la diagonale contient les n valeurs propres de A.

II. Exemples

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Rechercher les valeurs propres de la matrice A ainsi que ses vecteurs propres associés. Déterminer P, la matrice de diagonalisation de A. Calculer P^{-1}, puis $P^{-1}AP$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

2) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Même questions que précédemment.

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Même questions que précédemment.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

……

……...

……...

……...

……

……

……...

……...

……...

……

……

……...

……...

……...

……

……

……...

……...

……...

……

……

……...

……...

……

……...

✓ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

....

....

....

....

....

....

III. Application à la résolution de système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

1) Méthode

Soit un système différentiel linéaire de la forme :

$$(S_n)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases},$$

dans lequel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions de la variable t. On peut résoudre un tel système par le calcul matriciel.

Soit : $V_C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $W_C = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$, en posant $x'_1 = \dfrac{dx_1}{dt}$, $x'_2 = \dfrac{dx_2}{dt}$, …, $x'_n = \dfrac{dx_n}{dt}$.

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

On travaille pour cela dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On peut écrire alors : $W_C = A.V_C$.(1).
Si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, il existe alors P, une matrice de diagonalisation telle que :

$$P^{-1}AP = D = \text{mat}_{B'}f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On travaille maintenant dans la base B', constituée par les vecteurs propres de A.
(1) s'écrit alors dans la base B' : $W_{B'}=D.V_{B'}$.

En notant : $V_{B'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $W_{B'} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}$, où $y'_1 = \dfrac{dy_1}{dt}$, $y'_2 = \dfrac{dy_2}{dt}$, …, $y'_n = \dfrac{dy_n}{dt}$

(1) équivaut alors au système différentiel à variables séparables suivant : $S_n \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 \\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n \end{cases}$.

Après l'avoir résolu, on obtient donc $V_{B'}$, puis V_C par changement de base : $V_C = P.V_{B'}$, où P, la matrice de diagonalisation de A est aussi appelée matrice de passage de B' vers C.

1) <u>Exemple</u> Résoudre les systèmes suivants :

✓ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + 5y \end{cases}$ avec x(0)=1 et y(0)=0.

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) - y(t) + 3z(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x(t) + 2y(t) + 3z(t) \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x(t) - 2y(t) + 9z(t) \end{cases}$$

vérifiant les conditions (initiales) : x(0)=y(0)=0 et $\dfrac{dz}{dt}(0) = -27$.

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………...

Exercices sur le calcul matriciel

Exercice 1 : Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et V le vecteur défini par : $V = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer A.V.

Exercice 2 : Soit les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; calculer les produits AB et BA. ?

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer, si c'est possible A^{-1} .

Exercice 4 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice M^2
2) Vérifier que $M^2=3M-2I$
3) En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}
4) Résoudre le système : $\begin{cases} y - z = 6 \\ -3x + 4y - 3z = 8 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

Exercice 5

Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 : Soit la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -12 \\ 2 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Vérifier qu'elle est inversible et déterminer sa matrice inverse.

1) Résoudre alors le système suivant : $\begin{cases} x+3y-12z=2 \\ 2x-8z=-4 \\ x-y-2z=6 \end{cases}$

2) Faire de même pour résoudre : le système $S\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-2y+z=-1 \\ -x+2y+2z=-5 \end{cases}$.

Exercice 7

1) Soit la matrice carrée : $A=\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ -a & 0 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ ou a est réel. Pour quelles valeurs de a cette matrice est-elle inversible ? Trouver A^{-1} dans le cas où a=2.

2) Résoudre par inversion de la matrice le système : $(S)\ \begin{cases} 2x+y+2z=1 \\ -2x+2z=0 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases}$

Exercice 8 : On donne un réel a et l'endomorphisme u_a de End($\mathbb{R}^3$) dont la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est : $A_a=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$.

1) Calculer les valeurs propres de A_a (ou de u_a).
2) Etudier suivant le réel a, si la diagonalisation de A_a est possible, en précisant clairement les différents cas.
3) Si a = 0 Calculer A^n où n est un entier naturel. (On cherchera d'abord les vecteurs propres de A, puis la matrice de passage. On calculera alors D^n, où D est la matrice diagonale associée à A.)

Exercice 9 : Soit $Y=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, une matrice réelle. Résoudre l'équation $Y^2=I_2$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………