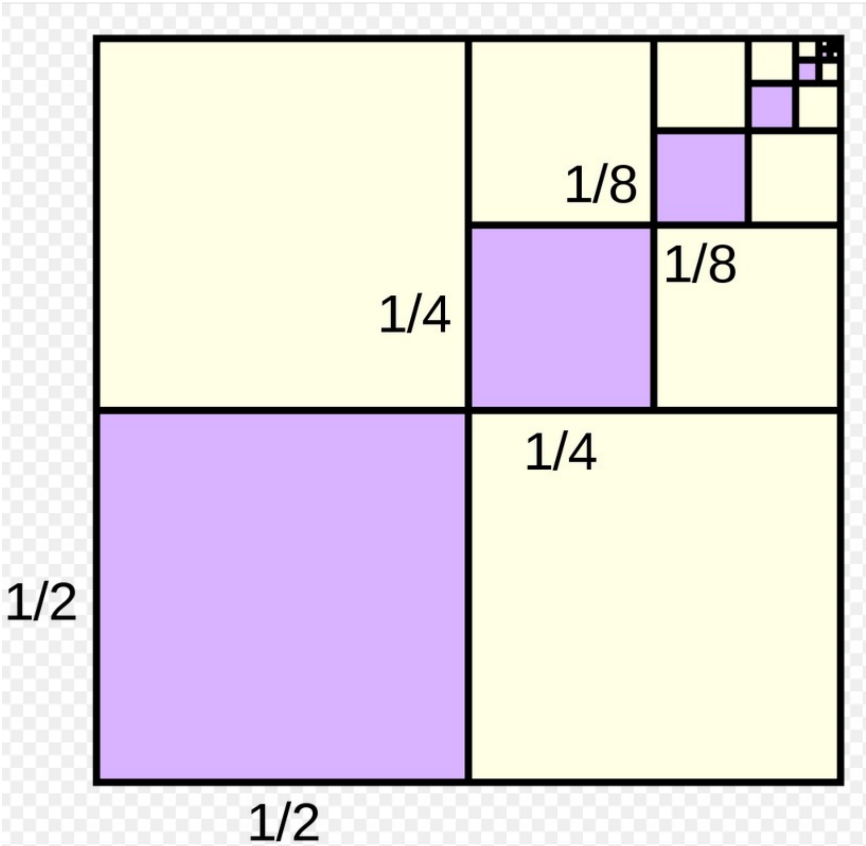
ISEN | école d'ingénieurs TOULON

ALL IS DIGITAL!

Mathématiques

Chapitre 4 : Séries numériques



Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr

Chapitre 4 : Séries numériques

I. Généralités :

1) Définition

Soit (U_n) une suite de nombres réels ou complexes, définie à partir du rang n_0.
On appelle série numérique de terme général (U_n), la somme des termes de la suite (U_n) :
On note :
$S_N = \sum_{n=n_0}^{N} U_n = U_{n_0} + U_{n_0+1} + U_{n_0+2} + ... + U_N$**, appelé la somme partielle de rang N.**
- Si la suite (S_N) a une limite finie S, on dit alors que la série converge, et on appelle S somme de la série. On note alors : $S = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=n_0}^{N} U_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$, et on appelle reste d'ordre N la suite définie par : $R_N = S - S_N = \sum_{n\geq N} U_n$
- Dans les autres cas, on dit que la série diverge.

Etudier la nature d'une série, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Exemple Déterminer la nature de la série de terme général : $u_n = (-1)^{n+1} \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$:

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

2) Condition nécessaire de convergence .

Si la série de terme général (U_n) converge, alors la suite (U_n) converge vers 0.

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} U_n = 0.$$

Attention la réciproque est fausse !!!!!!!!!

Si la suite (U_n) converge vers 0, alors la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ peut tout aussi bien diverger !!!! (voir séries de Rieman dans le paragraphe II.)

Important La contraposée est très intéressante, elle donne un critère de divergence :

Si la suite (U_n) ne converge pas vers 0, alors la série de terme général (U_n) diverge.

$$\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} U_n \text{ diverge} \;.$$

Exemple Etudier la nature de la série : $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n^2+n} - n$.

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

3) Série à termes complexes

Une série à terme général $U_n=a_n+i.b_n$ converge si et seulement si les séries de termes généraux $a_n=Re(U_n)$ et $b_n=Im(U_n)$ convergent.

II. <u>Séries de référence</u> :

1) Série géométrique de raison a

Somme partielle $S_N = \sum_{n=0}^{N} a^n = 1 + a + a^2 + ... + a^N = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}$ **si** $a \neq 1$.

La série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ **converge si et seulement si** $|a| < 1$

Si $|a| < 1$**, alors la somme** $S = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$

2) Séries de Riemann

La série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ **converge si et seulement si** $\alpha > 1$

III. <u>Séries à termes positifs</u> :

1) Définition

On appelle série à termes positifs toute série dont le terme général est positif à partir d'un certain rang.

2) Théorèmes de comparaison

Soient $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ **et** $\sum_{n=n_0}^{\infty} V_n$ **, deux séries à termes positifs. Soit N, un entier naturel.**

1) Si $\forall n \geq N$ $U_n \leq V_n$ **et si la série** $\sum_{n=n_0}^{\infty} V_n$ **converge, alors la série** $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ **converge.**

2) Si $\forall n \geq N$ $U_n \geq V_n$ **et si la série** $\sum_{n=n_0}^{\infty} V_n$ **diverge, alors la série** $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ **diverge.**

<u>Exemples</u> : Quelle est la nature des séries : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}\right)^{-n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$?

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

3) Théorème de l'équivalent

Soient $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ et $\sum_{n=n_0}^{\infty} V_n$, deux séries à termes positifs. Si les suites (U_n) et (V_n) sont équivalentes, alors les séries $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ et $\sum_{n=n_0}^{\infty} V_n$ sont de même nature.

Exemples : Quelle est la nature des séries : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$?

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

4) Théorèmes de d'Alembert et de Cauchy

✓ Théorème de D'Alembert

Soit $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ une série à termes positifs, telle que la limite L= $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$ existe et est finie.

1) Si L<1, alors la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ converge

2) Si L>1, alors la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ diverge

3) Si L=1, alors on ne peut pas conclure sur la nature de cette série avec ce théorème.

Exemple : Quelle est la nature de la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ où $V_n = \dfrac{(n+1)(n+2)...(2n)}{(2n)^n}$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Remarques : - Si la suite $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ n'a pas de limite, on note $\limsup \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ la plus grande valeur d'adhérence de la suite, la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ converge si $\limsup \dfrac{U_{n+1}}{U_n} < 1$.

- Si la suite $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ n'a pas de limite, on note $\liminf\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right)$ la plus petite valeur d'adhérence de la suite, la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ diverge si $\liminf\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right) > 1$.

Exemple : Quelle est la nature de la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ où $V_{2n} = 2^{-n}.3^{-n}$ et $V_{2n+1} = \dfrac{V_{2n}}{2}$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

✓ Théorème de Cauchy

Soit $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ une série à termes positifs, telle que la limite L= $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$ existe et est finie.

1) Si L<1, alors la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ converge

2) Si L>1, alors la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ diverge

3) Si L=1, alors on ne peut pas conclure sur la nature de cette série avec ce théorème.

Exemple : Quelle est la nature de la série : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n}$?

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Remarques : - Si la suite $U_n^{1/n}$ n'a pas de limite, on note $\operatorname{limsup}(U_n^{1/n})$ la plus grande valeur d'adhérence de la suite, la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ converge si $\operatorname{limsup}(U_n^{1/n}) < 1$.

- Si la suite $U_n^{1/n}$ n'a pas de limite, on note $\operatorname{limsinf}(U_n^{1/n})$ la plus petite valeur d'adhérence de la suite, la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ diverge si $\operatorname{liminf}(U_n^{1/n}) > 1$.

Exemple : Quelle est la nature de la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ où $V_n = \left|\sin\left(\frac{n+(-1)^n n+2}{8n}\pi\right)\right|^n$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

✓ Proposition $\boxed{\textbf{Si } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = L, \textbf{ alors } \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = L}$

La réciproque de cette proposition est fausse.

Exemple Quelle est la nature de la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ où $U_n = 2^{(-1)^n - n}$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

5) Comparaison d'une série et d'une intégrale

Soit f, une fonction numérique positive et décroissante sur l'intervalle $[a,+\infty[$; alors les séries de termes généraux $U_n = f(n)$ et $V_n = \int_n^{n+1} f(t).dt$ sont de même nature.

Exemple La série de Bertrand $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n.(\ln n)^{\beta}}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

IV. Convergence absolue :

1) Théorème

Soit $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ une série à termes de signe quelconque. On dit que la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ converge absolument lorsque la série : $\sum_{n=n_0}^{\infty} |U_n|$ converge.

Si la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ converge absolument, alors elle converge.

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |U_n| \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} U_n \text{ converge.}$$

Exemple :

Quelle est la nature de la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

2) Somme et produit de séries absolument convergentes

- ✓ Somme

La somme de deux séries absolument convergentes est absolument convergente, ceci résulte de : $|U_n + V_n| \leq |U_n| + |V_n|$

- ✓ Produit

Soit deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$ absolument convergentes. Alors la série de terme général $W_n = \sum_{p=0}^{n} U_p V_{n-p}$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} W_n = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} V_n$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} W_n$ s'appelle la « série produit » ou encore « produit de convolution ».

Remarque

$W_0 = U_0 V_0$
$W_1 = U_0 V_1 + U_1 V_0$
$W_2 = U_0 V_2 + U_1 V_1 + U_2 V_0$
. ..

$W_n = U_0 V_n + U_1 V_{n-1} + \ldots + U_p V_{n-p} + \ldots + U_{n-1} V_1 + U_n V_0$

V. Semi-convergence :

Définition **Une série de terme général U_n, réel ou complexe, est dite semi-convergente si elle converge, sans converger absolument.**

1) Théorème d'Abel (critère de convergence des séries non absolument convergentes)

Soit (a_n) une suite réelle ou complexe et (λ_n) une suite décroissante de réels >0. Alors la série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda_n . a_n$ converge dans chacun des cas suivants :

1er cas : La série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ est absolument convergente,

2ième cas : La suite (λ_n) converge vers 0 et les sommes partielles $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} a_n$ sont bornées par une constante M (indépendante de n).

Exemple Quelle est la nature de la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}$?

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

2) Théorème des séries alternées

Définition : **On dit que la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ est alternée lorsque : $\forall n \geq N,\ U_n . U_{n+1} < 0$.**

Il existe alors une suite (a_n), positive telle que : $\forall n \geq N,\ U_n = (-1)^n a_n$

Ou bien $\forall n \geq N,\ U_n = (-1)^{n+1} a_n$

Théorème : **Si la suite positive (a_n) est décroissante et a pour limite 0, alors la série alternée $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n a_n$ (ou $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$) converge.**

Exemple : Quelle est la nature de la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\left(\frac{1}{n}+n\right)\pi\right)$?

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Exercice Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente mais non absolument convergente (semi-convergente). Que dire alors de la série produit de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même ? Que dire du produit de deux séries semi-convergentes ?

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

VI. Convergence commutative

1) Définition

La série à termes réels ou complexes U_n est dite commutativement convergente si la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_{\sigma(n)}$ est convergente pour toute permutation σ de l'ensemble des entiers naturels.
Sa somme ne dépend pas de la permutation σ choisie.

2) Théorème

Une série est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente.

Dans ce cas la série converge quel que soit l'ordre dans lequel on prend ces termes.

Remarques

- ✓ En prenant σ l'application identique dans l'ensemble des entiers naturels, on obtient le résultat suivant : une série commutativement convergente est convergente.
- ✓ Toute série positive convergente est commutativement convergente.

Exemple

La série alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ convergente, n'étant pas absolument convergente n'est pas commutativement convergente, d'ailleurs si on pose :

$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + ...$, en réorganisant les termes, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)}\right) - \frac{1}{2(2n+2)} + ...$$

=……………………………………………………………………………………………

=……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Exercice 2 : **Recrutement EMSE – ITII**

Pour chacune des séries numériques suivantes étudier la convergence en justifiant avec soin la démarche suivie (type de la série étudiée, comparaison à quelle série de référence, critère ou équivalents utilisés, valeur des limites en jeu, etc.) :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 3}$$

$$S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\, 3^n}{n + 4^n} \qquad S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

$$S_5 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 3)^n} \qquad S_6 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt{3n+2}\sqrt{n^3+1}}$$

$$S_7 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\ln(n)}{n^2+1}\right)^n \qquad S_8 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\, n!}{(2n)^n}$$

$$S_9 = \sum_{n=1}^{\infty} n^n \sin^n\left(\frac{\pi}{3n}\right) \qquad S_{10} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^{\ln(n)}}$$

Formule de Stirling (pour S_8) : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$