Chapitre 6 : Séries de fonctions

I. Convergence d'une série de fonctions :

1) Convergence simple

Définition **Soit $(s_n)_{n\in IN}$, une suite de fonctions définies sur un domaine D. On dit que la suite de fonction (s_n) converge simplement vers une fonction s si pour chaque x fixé, la suite numérique $(s_n(x))$ converge vers s(x), ce qui se traduit par :**

$$\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in IN \text{ tel que } \forall n \geq N, |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

Exemple Soit $(s_n)_{n\in IN}$ la suite de fonctions définie par : $s_n(x) = x^n \quad x \in \mathbb{R}$. Déterminer le domaine D de convergence de la suite (s_n), ainsi que la fonction limite s.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

2) Convergence uniforme

Définition **Soit $(s_n)_{n\in IN}$, une suite de fonctions définies sur un domaine D. On dit que la suite de fonction (s_n) converge uniformément sur D vers s si on a :**

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in IN \text{ tel que } \forall n \geq N,\ \forall x \in D,\ |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

Ce qui équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in IN \text{ tel que } \forall n \geq N,\ \sup_{x\in D} |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

Proposition **La suite $(s_n)_{n\in IN}$ converge uniformément vers s sur D si et seulement si**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in D} |s_n(x) - s(x)|\right) = 0$$

Exemples

- ✓ Soit $(s_n)_{n\in IN}$ la suite de fonctions définie par : $s_n(x) = x^n \quad x \in \mathbb{R}$. Soit D=[-a,a] où 0<a<1. Montrer que (s_n) converge uniformément vers s=0 sur D.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

- ✓ Soit $(s_n)_{n\in IN^*}$ la suite de fonctions définie par :

$$s_n(x)=\begin{cases} nx & \text{si } 0\le x\le \frac{1}{n} \\ n\left(\frac{2}{n}-x\right) & \text{si } \frac{1}{n}\le x\le \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n}\le x\le 1 \end{cases}$$

pour $n \geq 2$ et $x \in [0;1]$. Etudier la convergence uniforme de cette suite sur [0 ;1]

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

- ✓ Soit $(s_n)_{n\in IN}$ la suite de fonctions définie par : $s_n(x)=\dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$, $x\in\mathbb{R}$. Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $\mathbb{R}$.

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

3) Convergence compacte

Définition On dit que la suite $(s_n)_{n\in IN}$ converge compactement sur D vers s, si la suite (s_n) converge uniformément vers s sur tout intervalle fermé de D.

Implications entre les types de convergence

$$\boxed{\textbf{C.U} \Rightarrow \textbf{C.C} \Rightarrow \textbf{C.S}}$$

II. Limite d'une suite de fonctions continues :

1) Exemple

La suite de fonctions $(s_n)_{n\in IN}$ continues sur [0 ;1] définie par : $s_n(x) = x^n$ converge simplement vers la fonction : $s(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0;1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$ qui n'est pas continue sur [0 ;1]

2) Théorème

Soit $(s_n)_{n\in IN}$, une suite de fonctions continues sur un ouvert D. Si la suite (s_n) converge compactement sur D vers s, alors s est continue sur D.

Remarques importantes

- ✓ Si la suite (s_n) converge uniformément sur D vers s, alors s est continue sur D.
- ✓ Contraposée : Si la suite (s_n) converge simplement sur D vers s, et si s n'est pas continue sur D, alors la suite (s_n) ne converge pas uniformément sur D.

Exemple Soit $(s_n)_{n\in IN^*}$ la suite de fonctions définie par : $s_n(x) = (x^2 + n^{-2})^{1/2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

III. <u>Limite d’une suite de fonctions dérivables</u> :

1) <u>Exemple</u>

Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par : $s_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Etudier la convergence uniforme de cette suite, que dire de la suite des dérivées ?

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

2) Théorème

Soit $(s_n)_{n\in IN}$, une suite de fonctions dérivables sur un ouvert D, qui converge simplement vers une fonction s . Si la suite des dérivées (s'_n) converge compactement sur D, alors s est dérivable sur D, et on a : $s' = \lim\limits_{n\to\infty} s'_n$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_n(x)-s_n(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{s_n(x)-s_n(x_0)}{x-x_0}$

Remarques importantes

- ✓ Si la suite (s'_n) converge uniformément sur D, alors s est dérivable sur D.
- ✓ Contraposée : Si la suite (s_n) converge simplement sur D vers s, et si s n'est pas dérivable sur D, alors la suite (s'_n) ne converge pas uniformément sur D.

IV. Limite d'une suite de fonctions intégrables :

1) Théorème

Soit $(s_n)_{n\in IN}$, une suite de fonctions intégrables sur [a,b], qui converge uniformément sur [a,b] vers une fonction s ; alors s est intégrable sur [a,b] et on a :

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)dx$$

Remarque importante Si la suite (s_n) est une suite de fonctions continues sur [a,b] qui converge uniformément sur [a,b] vers s, alors s est intégrable sur [a,b].

2) Exemple Soit $(s_n)_{n\in IN^*}$ la suite de fonctions définie par :

$$s_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ n^2\left(\dfrac{2}{n}-x\right) & \text{si } \dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \dfrac{2}{n} \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{pour} \quad x \in [0;1].$$

Calculer $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)dx$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)dx$. Que peut-on en déduire ?

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………