UNIVERSITE DE TOULON

IUT DE TOULON

DEPARTEMENT GEII

Cours de Mathématiques

Chapitre 1 : Programme de l'année
Quelques notions indispensables pour bien démarrer ses études en GEII.

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15
http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=527

Table des matières

Programme de l'année 2020 - 2021

<table>
<tr><td rowspan="2">SEMESTRE 1</td><td><u>MA1</u> : Fondamentaux</td><td>10^HCM
20^HTD
12^HTP</td><td>Test / QCM coeff (0.5)
2 DS coeff (2*0.75)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Chap.1 : Notions indispensables pour le GEII (calculs algébriques, équations de droite, équation du second degré, trigonométrie, dérivées, primitives et intégrale de fonctions trigonométriques, nombres complexes, équations différentielles du premier ordre à coefficients constants.)

Chap.2 : Polynômes (factorisation dans $\mathbb{C}$et $\mathbb{R}$, résolution d'équation de degré>=2) et fractions rationnelles (décomposition en somme d'éléments simples). Applications à la transformation de Laplace.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">SEMESTRE 2</td><td><u>MA2</u> : Fondamentaux</td><td>15^HCM
30^HTD</td><td>Test / QCM coeff (1)
2 DS coeff (2*1)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Chap.3 : Approfondissement sur les fonctions (Sinus cardinal, fonctions hyperboliques), limites, équivalents, étude complète d'une fonction, fonctions réciproques. Fonctions réciproques.

Chap.4 : Approfondissement du calcul intégral (IPP, changement de variable, parité, périodicité, calcul de coefficients de Fourier, intégrale de fractions), intégrales généralisées (application : transformées de Laplace de signaux usuels)

Chap.5 : Equations différentielles linéaires du premier et du second ordre à coefficients constants.</td></tr>
</table>

Coordonnées

Mail : sylvia.lebeux@univ-tln.fr   Bureau : Bâtiment A – 1er étage – A042.
Responsable des poursuites d'études : **http://moodle.univ-tln.fr/course/view.php?id=573**

Bibliographie

- Pour les étudiants issus d'un BAC Pro :

  Maths - contrôle continu en première STI2D (côte BU : 510.71 PRE et magasin GEII)
  Maths - contrôle continu en terminale STI2D (côte BU : 510.71 PREet magasin GEII)

- Pour les étudiants souhaitant s'entraîner et progresser :

  Mathématiques en modules - Tome 1 - bases fondamentales DUT et BTS industriels auteur : C.Larcher - édition CASTELLA
  Magasin GEII
  Remarques : Résumé/rappel de cours de terminale et DUT et exercices très basiques appliqués au GEII corrigés.

  Maths BTS-DUT industriels - édition Techno + - auteurs C.Larcher
  Côte BU : 510 LAR
  Remarques : Résumé de cours et exercices très appliqués au GEII corrigés.

- Pour les étudiants souhaitant suivre de longues études :

  Cours DUT/BTS : édition : Ellipses – auteur : P. Variot
  Côte BU :510 VAR
  Remarques : Cours DUT d'un très bon niveau, tout le programme du DUT y est traité et plus.

  L'épreuve de mathématiques au concours ENSEA - édition : CASTELLA - auteurs : Lièvre - Mazoyer
  ISBN : 978 2 7135 2846 0 à la BU.
  Remarques : Résumé de cours très clair et sujets de concours corrigés intégralement.

Partie A : Calculs de base à connaître par cœur et à maîtriser

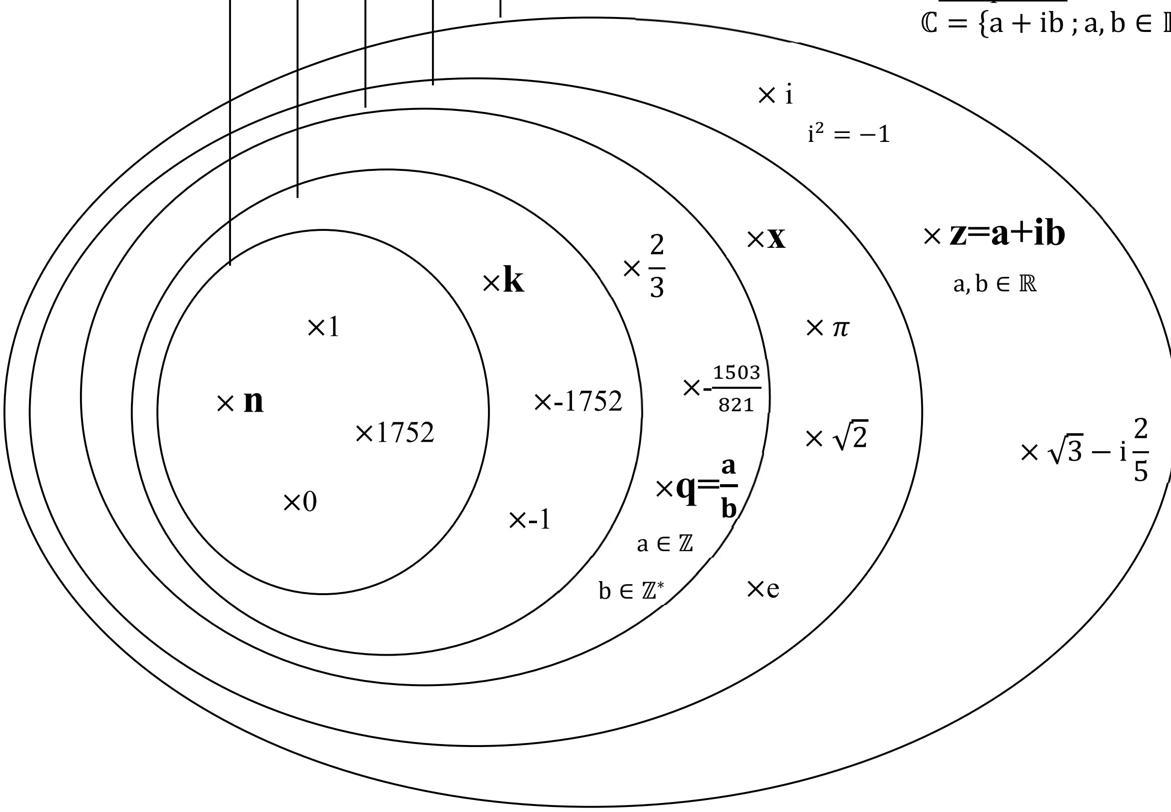
Ensemble des nombres <u>entiers naturels</u> : $\mathbb{N} = \{0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;\ \dots\ ;n\ ;\dots\}$

Ensemble des nombres <u>entiers relatifs</u> :
$\mathbb{Z} = \{\dots\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;\dots\ ;k\ ;\dots\}$

Ensembles des nombres <u>rationnels</u> : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\ ;a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Ensembles des nombres <u>réels</u> : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{\{\sqrt{2}\ ;\ e\ ;\ \pi\ ;\dots\ ;x\ ;\dots\}}_{\text{nombres irrationnels}}$

Ensemble des nombres <u>complexes</u> :
$\mathbb{C} = \{a + ib\ ; a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Ensemble des entiers naturels pairs : $\{0\ ;2\ ;4\ ;6\ ;\dots\ ;2n \text{ où } n \in \mathbb{N}\ ;\dots\}$

Ensemble des entiers naturels impairs : $\{1\ ;3\ ;5\ ;7\ ;\dots\ ;2n+1 \text{ où } n \in \mathbb{N}\ ;\dots\}$

Ensemble des entiers relatifs pairs : $\{\dots\ ;\ -6\ ;-4\ ;\ -2\ ;\ 0\ ;2\ ;4\ ;6\ ;\dots\ ;2k \text{ où } k \in \mathbb{Z}\ ;\dots\}$

Ensemble des entiers relatifs impairs : $\{\dots\ ;\ -5\ ;-3\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;3\ ;5\ ;7\ ;\dots\ ;2k+1 \text{ où } k \in \mathbb{Z}\ ;\dots\}$

$\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{\text{n facteurs}}=a^{n}$	$\frac{1}{a^{n}}=a^{-n}$ $a\neq 0$	$a^{0}=1$	$a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$
$\left(a^{m}\right)^{n}=a^{m\times n}$	$\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$ $a\neq 0$	$(ab)^{n}=a^{n}b^{n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}$ $b\neq 0$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ $b\neq 0$	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ $b\neq 0$ et $d\neq 0$	$\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$ $b\neq 0$ et $a\neq 0$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ $b\neq 0$, $c\neq 0$ et $d\neq 0$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$ $b\neq 0$ et $d\neq 0$	$\frac{ab}{cb}=\frac{a}{c}$ $b\neq 0$, $c\neq 0$	$ax+b=0\Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$ $a\neq 0$	$ax+b\leq 0$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq-\frac{b}{a}\text{ si }a>0\\x\geq-\frac{b}{a}\text{ si }a<0\end{cases}$
Soit $x\geq 0$, $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	Soit $x\geq 0$, $\left(\sqrt{x}\right)^{2}=\sqrt{x}\sqrt{x}=x$	Soit $a\geq 0$, $\sqrt{a^{2}}=a$	Soit $a\leq 0$, $\sqrt{a^{2}}=-a$
$\sqrt{a^{2}}=\begin{cases}a\text{ si }a\geq 0\\-a\text{ si }a\leq 0\end{cases}=\lvert a\rvert$	Soit a>0, $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$	$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{2}=x+2\sqrt{x}.\sqrt{y}+y$ $x\geq 0$, $y\geq 0$	$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^{2}=x-2\sqrt{x}.\sqrt{y}+y$ Si $x\geq 0$, $y\geq 0$
$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=x-y$ $x\geq 0$, $y\geq 0$	$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$ $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x\neq y$	$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ $a\geq 0$, $b\geq 0$	$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $a\geq 0$, b>0
Soit x, un nombre positif et n un entier naturel non nul, la racine n[ième] de x, notée $\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$ est le nombre réel positif y tel que $y^{n}=x$			
$a^{2}+2ab+b^{2}=(a+b)^{2}$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$	$a^{2}-2ab+b^{2}=(a-b)^{2}$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$	$a^{2}-b^{2}=(a-b)(a+b)$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$	$a^{2}+b^{2}=(a-ib)(a+ib)$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$ ($i^{2}=-1$)
$a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}=(a+b)^{3}$		$a^{3}-3a^{2}b+3ab^{2}-b^{3}=(a-b)^{3}$	

<u>Factorisation et signe de</u> $P(x)=ax^{2}+bx+c$ avec $a\neq 0$: on résout $P(x)=0$. On calcule le discriminant $\Delta=b^{2}-4ac$

- Si $\Delta>0$, *P possède deux racines réelles* : $x_{1}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_{2}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, alors $P(x)=a(x-x_{1})(x-x_{2})$ est la factorisation de P. "P(x) est du signe de -a entre les racines ".
- Si $\Delta=0$, P possède une racine réelle double : $x_{1}=\frac{-b}{2a}$, alors $P(x)=a(x-x_{1})^{2}$ est la factorisation de P. P(x) est du signe de a.
- Si $\Delta<0$, *P possède deux racines complexes conjuguées* : $z_{1}=\frac{-b+i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ et $z_{2}=\frac{-b-i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$, alors $P(x)=a(x-z_{1})(x-z_{2})$ est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$. P est du signe de a.

<u>Remarque</u> : Soit $P(x)=x^{2}-s.x+p$. x_1 et x_2, les racines de P vérifient alors le système suivant : $\begin{cases}s=x_{1}+x_{2}\\p=x_{1}\times x_{2}\end{cases}$

<u>Factoriel d'un entier naturel</u> Soit n, un entier naturel non nul, on appelle factoriel de n et on note n!, le produit des n premiers entiers naturels : $n!=1\times 2\times 3\times\ldots\times n$ Par convention 0! = 1.
Exemple : 1! = 1 ; 2! = 2 ; 3! = 6 ; 4!=24 ; 5! = 120 etc...
On remarque que 4! = 4 × 3! ou encore que 5! = 5 × 4! , plus généralement : $n!=n\times(n-1)!$

Proportionnalité Deux grandeurs X et Y non nulles sont proportionnelles, lorsqu'il existe un réel k non nul tel que :

Valeurs de X	Valeurs de Y
x_1	y_1
x_2	y_2
...	...
x_n	y_n

$\times k$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = k.x_1 \\ y_2 = k.x_2 \\ \dots \\ y_n = k.x_n \end{array}\right\} \text{ se note aussi } \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}\ y_i = k.x_i$$

On a donc aussi : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = k$

Ou encore : $x_1 y_2 = x_2 y_1$ etc...

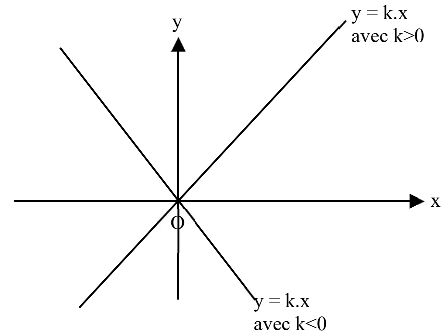
En pratique, sachant que X et Y sont deux grandeurs proportionnelles, ne connaissant pas k, le coefficient de proportionnalité,

On obtient x en résolvant l'équation :

$$x_1 y = x y_1 \Leftrightarrow x = \frac{x_1 y}{y_1}$$

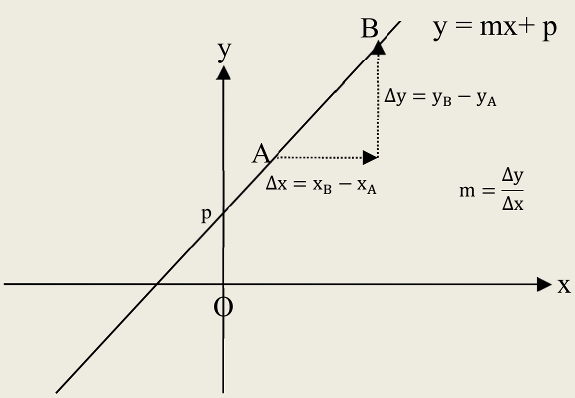
Valeurs de X	Valeurs de Y
x_1	y_1
x inconnu	y connu
...	...

$\times ?$



La fonction f, définie par : f(x) = k.x est appelée **fonction linéaire**. Sa représentation graphique est la droite passant par O, l'origine du repère et ayant pour coefficient directeur (pente) k.

Equation (réduite) de la droite (AB) y = m.x + p où m est le coefficient directeur (la pente) de (AB) et p est l'ordonnée à l'origine.



Calcul de la pente m :
Si on connaît les coordonnées de A et B : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (A$\neq$ B)
Calcul de l'ordonnée à l'origine p :
Si on connaît le point Q, intersection de (AB) et de l'axe des ordonnées, on en déduit facilement $p = y_Q$,
sinon, on résout l'équation : $y_A = m.x_A + p$ (en effet, A$\in$ (AB)), et on obtient : $p = y_A - m.x_A$

Remarques : - Δy et Δx sont proportionnels, puisque $\Delta y = m.\Delta x$
- La fonction f, définie par : f(x) = m.x +p est appelée **fonction affine**. Sa représentation graphique est la droite passant par le point (0 ; p), et ayant pour coefficient directeur (pente) m.

Implication et équivalence par l'exemple

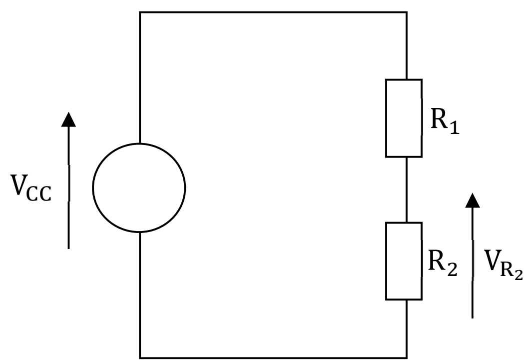
Implication : $x = 3 \Longrightarrow x^2 = 9$, mais la réciproque est fausse : $x = 3 \not\Leftarrow x^2 = 9$
Equivalence : $x = 3$ ou $-3 \Longrightarrow x^2 = 9$, et la réciproque est vraie : $x = 3$ ou $-3 \Leftarrow x^2 = 9$.
On écrit alors : $x = 3$ ou $-3 \Leftrightarrow x^2 = 9$ ou encore : $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou -3 qui est une équivalence.

Exercices d'application au GEII

Exercice 1 Deux résistances sont associées en parallèle, alors, on obtient la relation suivante, où R_e est la résistance équivalente : $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.
Montrer que R_e est égale au quotient du produit des deux résistances par leur somme.

Exercice 2 Pont diviseur de tension

Soit V_{CC}, la tension aux bornes du générateur, et V_{R_2}, la tension aux bornes de la résistance R_2. On obtient alors la relation suivante : $V_{R_2} = V_{CC}.\frac{R_2}{R_2+R_1}$.



1) Exprimer V_{CC} en fonction de R_1, R_2 et V_{R_2}.
2) On souhaite obtenir V_{R_2} = 2 V. Quelle valeur donner à R_2, sachant que R_1 = 1 kΩ et V_{CC} = 5 V ? Etablir d'abord l'expression littérale puis faire l'application numérique.

Exercice 3 Convertisseur Température / Tension.

Une interface convertit la température T en °C en tension U en Volt. La gamme de températures en entrée est (10°C - 40°C) et la gamme de tensions en sortie est (0 V - 10 V).
(A 10°C on obtient 0 V en sortie, et à 40°C on obtient 10 V en sortie)
1) Si la température en entrée est de 25°C, quelle est la tension de sortie ?
2) Si la tension de sortie est de 3V, quelle est la température à l'entrée ?
3) Soit T, la température à l'entrée et U, la tension de sortie, exprimer U en fonction de T, puis représenter les variations de U en fonction de T.
4) En déduire l'expression de T en fonction de U.

Exercice 4 Résistances équivalentes

Soit r, une résistance (strictement positive) telle que : $r = 10\Omega$.

1) Déterminer la résistance positive x telle que : $r + \frac{rx}{r+x} = x$
2) Déterminer la résistance positive x telle que : $r + \frac{rx}{r+x} \geq x$.

Partie B : Trigonométrie : Définitions, propriétés et formulaire

Dans un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle **orienté de centre O et de rayon 1**. Sur ce cercle, on définit une **origine I** et deux sens : le **sens direct** (ou positif), est le **sens inverse des aiguilles d'une montre** ; et le sens indirect (ou négatif), est le sens des aiguilles d'une montre.

La longueur d'un cercle de rayon R est : $L = 2\pi R$, la longueur du cercle trigonométrique est donc 2π.

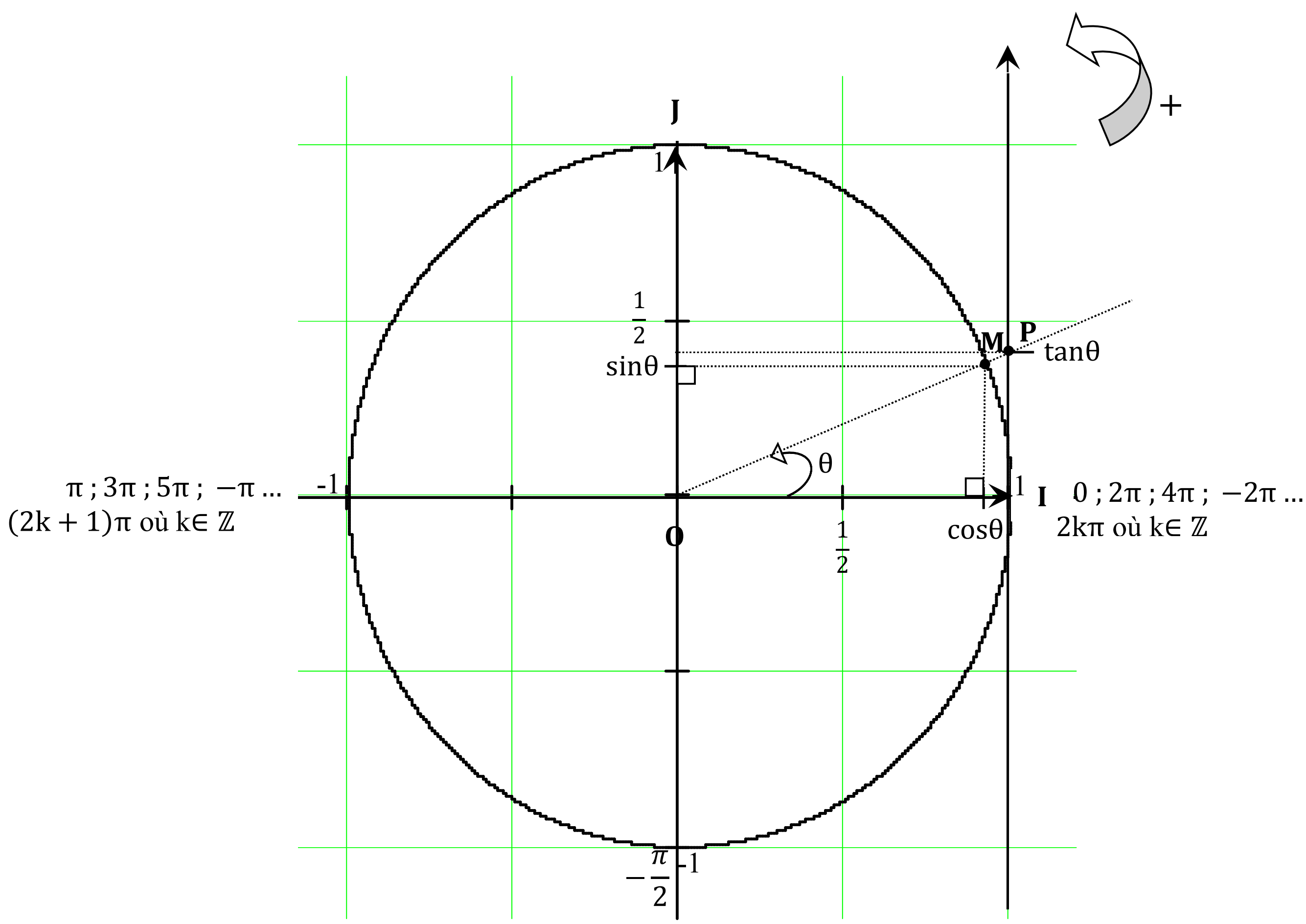
Soit M, un point sur le cercle trigonométrique. On note $\boldsymbol{\theta}$ **une mesure en radians de l'angle orienté** $\left(\overrightarrow{\mathbf{OI}}, \overrightarrow{\mathbf{OM}}\right)$
$\boldsymbol{\theta + 2k\pi}$ **où** $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$, sont donc aussi des mesures de ce dernier, on les appelle encore $\boldsymbol{\theta}$ **modulo** $\boldsymbol{2\pi}$

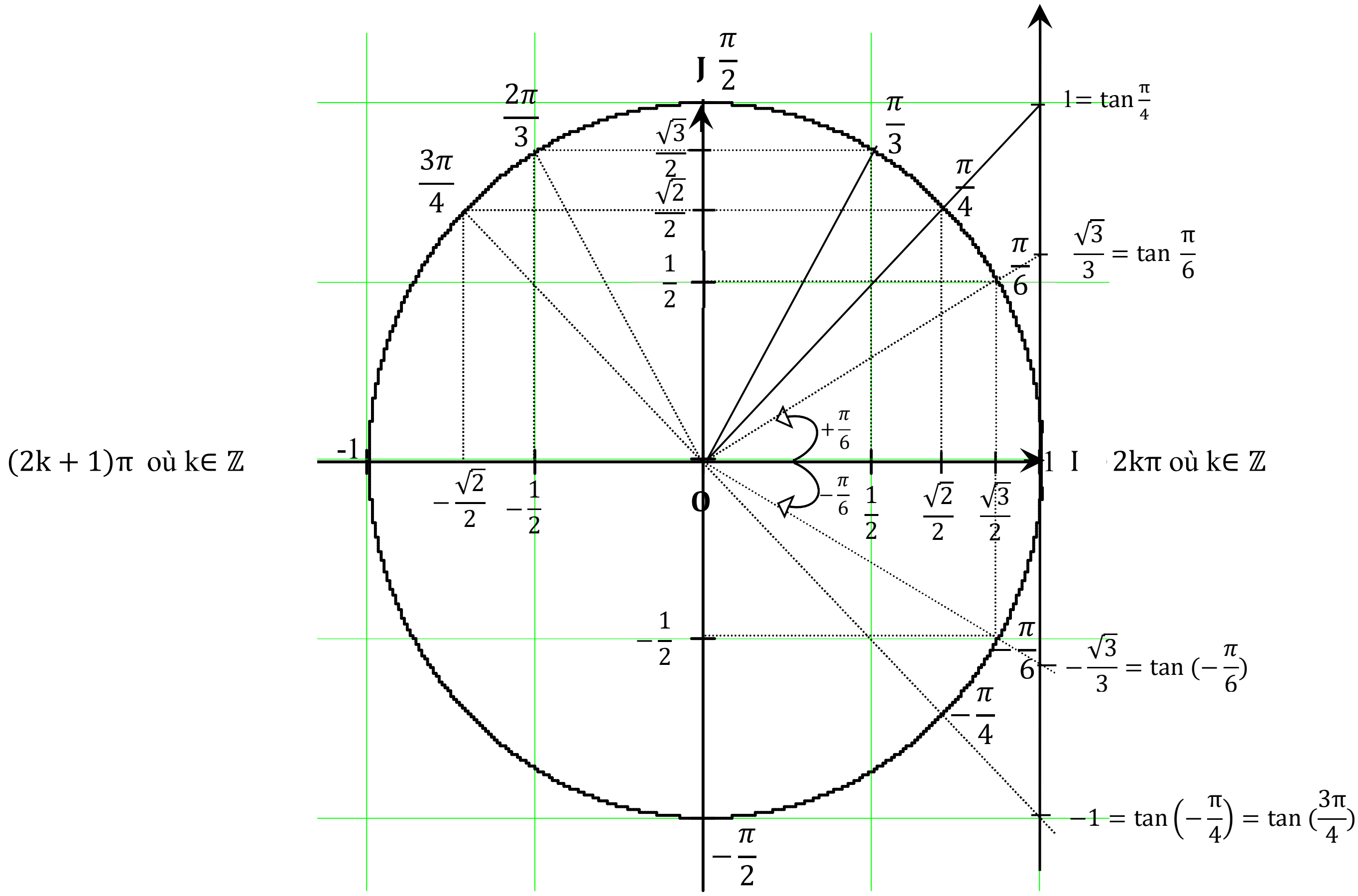
On appelle **mesure principale** de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ l'unique mesure appartenant à l'intervalle $]\boldsymbol{-\pi, \pi}]$

On appelle **cosinus** de l'angle orienté θ, **l'abscisse du point M** dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$
On appelle **sinus** de l'angle orienté θ, **l'ordonnée du point M** dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$
On obtient donc : $\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = \cos\theta . \overrightarrow{OI} + \sin\theta . \overrightarrow{OJ}}$

Soit Δ**, la droite parallèle à l'axe des ordonnées, passant par le point I**. Soit P, le point d'intersection des droites (OM) et Δ.
On appelle **tangente** de l'angle orienté θ, et on note $\tan(\theta)$, **l'ordonnée du point P** dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. On reportera cette dernière sur la droite Δ.

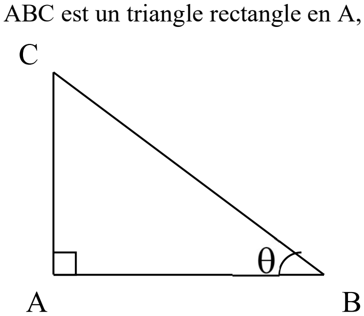
<u>Remarque</u> : $\frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \boldsymbol{\tan\theta}$ **est la pente de la droite (OM)** qui a donc pour équation : $y = x.\tan\theta$
Voilà pourquoi, le point P d'abscisse 1 et qui appartient à (OM) a pour ordonnée $\tan\theta$.





θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	Impossible

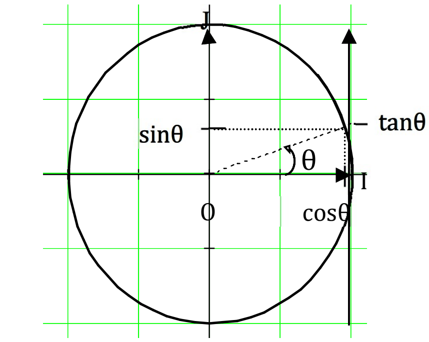
ABC est un triangle rectangle en A, et $\widehat{B}$ est aigüe.



$$\cos(\theta) = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

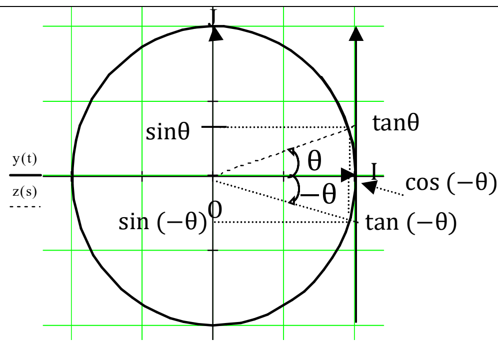


$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$$
$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$
$$\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan(\theta + 2\pi) = \tan(\theta)$$
$$\tan(\theta + 2k\pi) = \tan\theta \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques

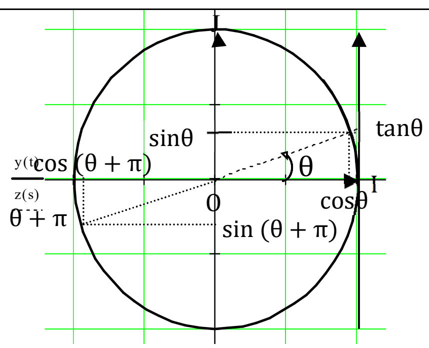


$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$$

La fonction cosinus est paire, les fonctions sinus et tangente sont impaires

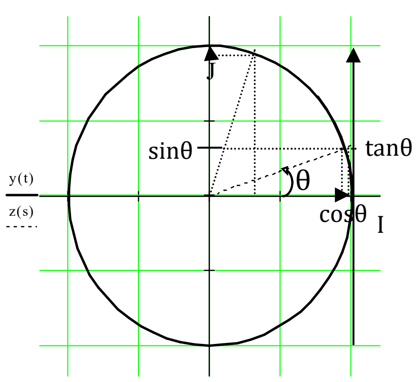


$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$$
$$\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

La fonction tangente est π-périodique



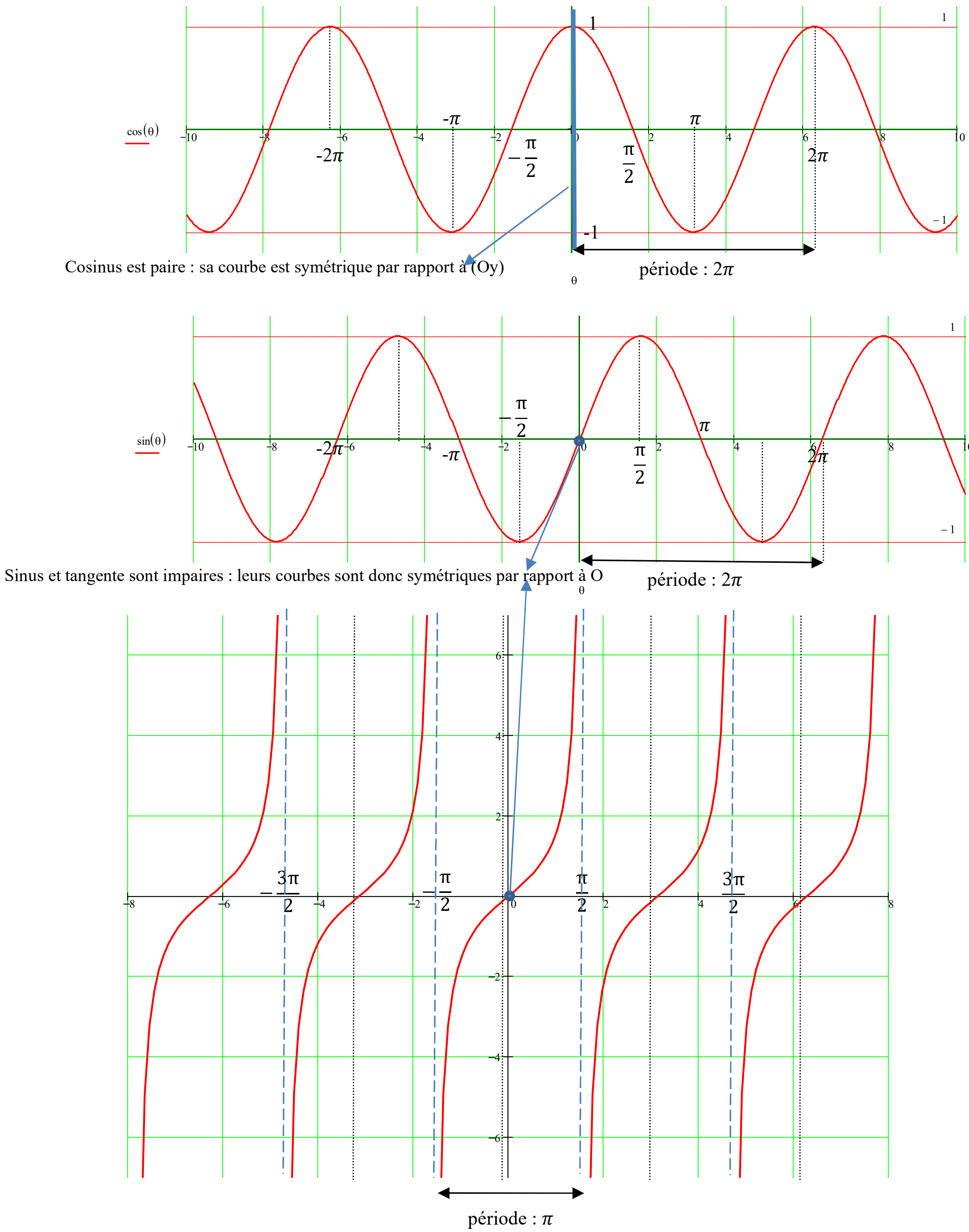
$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Encadrement de cosinus et sinus : $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$

Représentation graphique des fonctions cosinus, sinus et tangente :

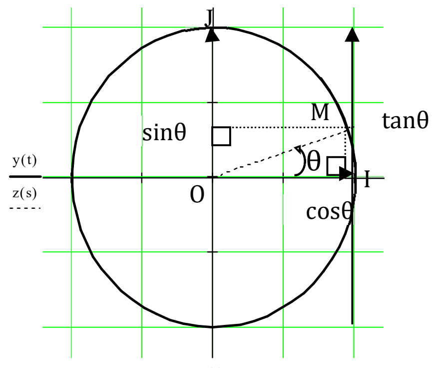


Formulaire à connaître par cœur

$$\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \forall\, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}$$

$$1+\tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \quad \forall\, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}$$



$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$	$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$
$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$	$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$	$\sin(2a) = 2.\cos a.\sin a$

<u>Formules de linéarisation</u> : (Transformation d'un produit en somme)

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\sin(a).\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

$$\sin(a).\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

$$\cos(a).\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\mathrm{co}\ (a+b)}{2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b} \qquad \tan(2a) = \frac{2.\tan a}{1-\tan^2 a}$$

<u>Dérivées</u> :

$$(\cos(x))' = -\sin(x) \qquad (\cos(ax+b))' = -a.\sin(ax+b) \qquad (\cos(U))' = -U'.\sin(u)$$

$$(\sin(x))' = \cos(x) \qquad (\sin(ax+b))' = a.\cos(ax+b) \qquad (\sin(U))' = U'.\cos(u)$$

$$(\tan(x))' = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$$

$$(\tan(ax+b))' = a.\left(1+\tan^2(ax+b)\right) = \frac{a}{\cos^2(ax+b)} \quad \forall\, ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$$

Primitives de sin(ax+b) : $-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ + Cte ($a\neq 0$)

Primitives de U'.sin(U) : -cos (U) + Cte

Primitives de cos (ax+b) : $\frac{1}{a}\sin(ax+b)$ + Cte ($a\neq 0$)

Primitives de U'.cos (U) : sin (U) + Cte

Primitives de $\frac{1}{\cos^2(ax+b)} = 1+\tan^2(ax+b)$: $\frac{1}{a}\tan(ax+b)$ + Cte ($a\neq 0$)

Primitives de $\frac{U'}{\cos^2(U)} = U'.\left(1+\tan^2(U)\right)$: tan (u) + Cte

Etude des signaux trigonométriques

$\sin \; : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$, $\theta \longmapsto \sin\theta$ $\qquad$ $\cos \; : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$, $\theta \longmapsto \cos\theta$ $\qquad$ $\tan \; : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k\epsilon\mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\theta \longmapsto \tan\theta$

<u>Période, fréquence, pulsation, amplitude, déphasage</u>

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques, et la fonction tangente est π-périodique
En effet, on a vu que : $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$; $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$ et $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$

Les fonctions $t \longmapsto \sin(\omega t + \varphi)$ et $t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$ sont périodiques de <u>période</u> : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ où $\omega \neq 0$
En effet, $\sin(\omega(t + T) + \varphi) = \sin(\omega t + \omega T + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi + 2\pi) = \sin(\omega t + \varphi)$

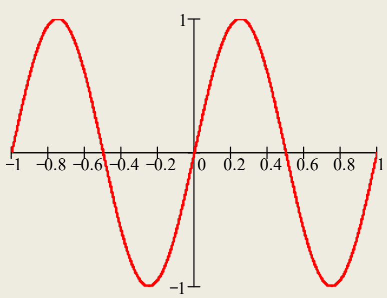
La fréquence f d'une fonction T-périodique est le nombre de motifs par unité de temps (si la variable t représente le temps). Donc $f = \frac{1}{T}$. Si T est en seconde, alors **f est en s^{-1} ou en Hertz (Hz).** Ainsi, $t \longmapsto \sin(\omega t + \varphi)$ a pour fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$

On peut également exprimer le rythme d'une fonction périodique par la notion de **<u>pulsation</u>** (ou fréquence angulaire) **ω**, exprimé en **radians par seconde (rd/s)**

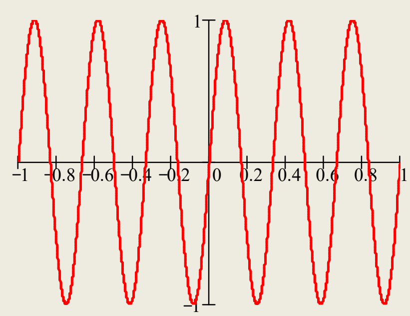
$t \longmapsto A.\sin(\omega t + \varphi)$ a pour <u>amplitude $|A|$</u>

$f_1 : t \longmapsto A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ et $f_2 : t \longmapsto A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$ sont en déphasage de $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.
Si $\Delta\varphi > 0$ ($\Delta\varphi < 0$), on dit que f_2 est en avance (retard) de phase par rapport à f_1.
Les signaux **cosinus et sinus sont déphasés de $\frac{\pi}{2}$**, en effet, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$.

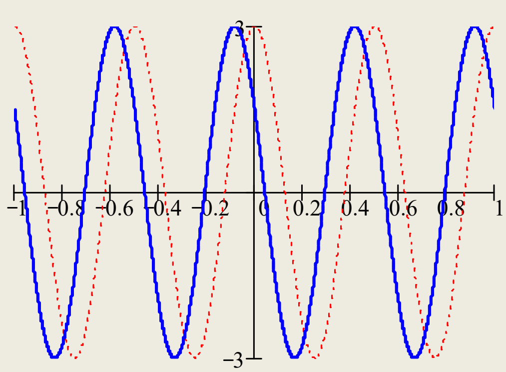
<u>Représentations graphiques de quelques signaux trigonométriques</u>



Fonction : $y = \sin(2\pi t)$
Période : T = 1 s
Fréquence : f = 1 Hz (1 motif sur 1 s)



Fonction : $y = \sin(6\pi t)$
Période : T = 1/3 s
Fréquence : f = 3 Hz (3 motifs sur 1s)



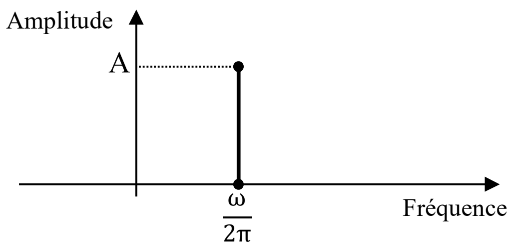
Fonction "trait pointillé" : $y = 3\cos(4\pi t)$
Fonction "trait continu": $y = 3\cos(4\pi t + \frac{\pi}{3})$

Période des signaux : T = 1/2 s
Fréquence des signaux : f = 2 Hz (2 motifs sur 1 s)
Amplitude des signaux : 3 (unités en ordonnée)
Déphasage : $4\pi t + \frac{\pi}{3} - 4\pi t = \frac{\pi}{3}$ s

Spectre de signaux sinusoïdaux

Le **spectre** d'un signal est la **représentation des amplitudes** des différentes composantes présentes dans le signal **en fonction de la fréquence.**

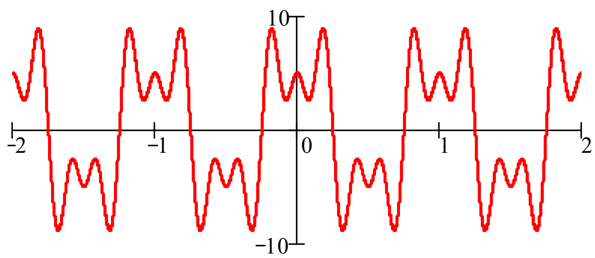
Spectre du signal sinusoïdal **x(t) = A sin(ωt + φ)**(etdonc aussi du signal $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$)

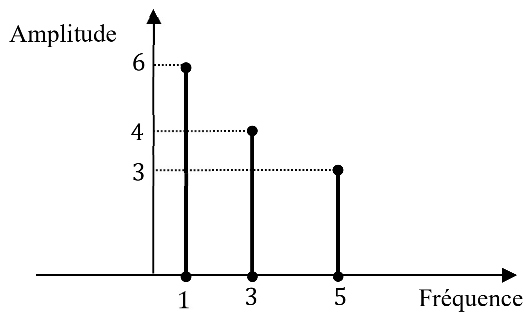


Le spectre d'une somme de sinusoïdes est la somme de leurs spectres.

Spectre du signal périodique **x(t)** = $\mathbf{3\cos(10\pi t) + 6\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos(6\pi t)}$

Représentation temporelle





Valeur moyenne, valeur efficace d'un signal périodique

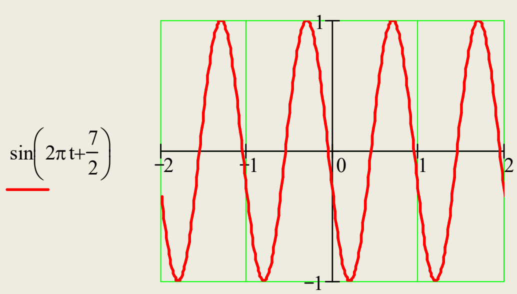
La **valeur moyenne** d'une fonction intégrable et T-périodique f, est la valeur donnée par : $\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,dt$ où a est un nombre réel quelconque. La **valeur efficace** de f est la racine carré de la valeur moyenne de f^2 : $\sqrt{\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f^2(t)\,dt}$

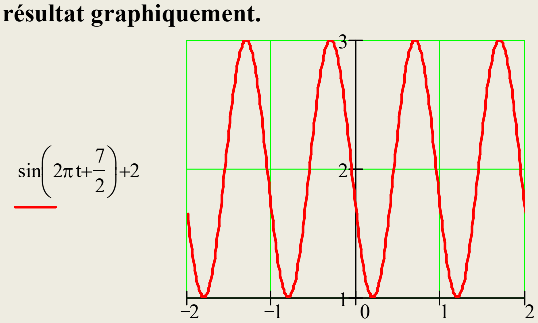
Rappel : Si F est une fonction primitive de f (c'est à dire : $F'(t) = f(t) \quad \forall t$), alors $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Valeur moyenne du sinus : $\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t + \varphi)dt = \frac{1}{T\omega}[-\cos(\omega t + \varphi)]_0^T = \frac{1}{T\omega}(-\cos(\omega T + \varphi) + \cos\varphi)$

Comme $\omega T = 2\pi$, et la fonction cosinus est 2π-périodique, alors $\cos(\omega T + \varphi) = cos\varphi$ et :

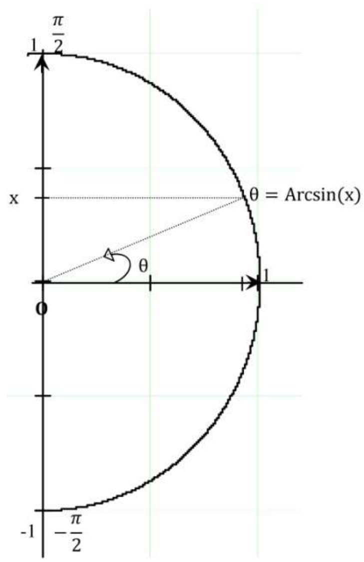
la valeur moyenne de cosinus est donc nulle, on retrouve ce résultat graphiquement.





Soit m, la valeur moyenne du signal périodique f, alors m+k est la valeur moyenne du signal f+k où k est une constante .

Arcsinus



Soit $x \in [-1;1]$, on appelle Arcsinus de x et on note Arcsin(x), l'unique angle $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ solution de l'équation : $\sin(\theta) = x$.

$\text{Arcsin}(1)=\frac{\pi}{2}$; $\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$; $\text{Arcsin}\left(\frac{-1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$

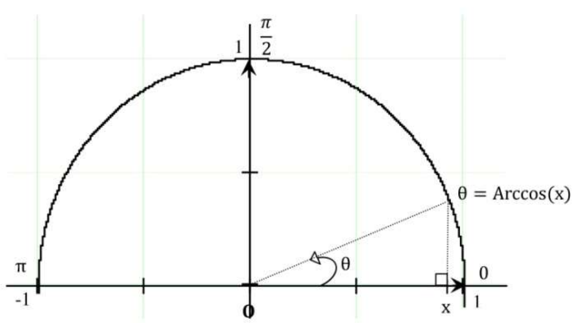
$\forall x \in [-1;1] \quad \sin(\text{Arc}\sin(x)) = x$

$\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{Arc}\sin(\sin(\theta)) = \theta$

$\sin\left(\text{Arc}\sin\left(\frac{1}{8}\right)\right)=\frac{1}{8}$; $\text{Arc}\sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)=\frac{\pi}{7}$

$\text{Arc}\sin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=-\frac{\pi}{2}$

Arccosinus



Soit $x \in [-1;1]$, on appelle Arccosinus de x et on note Arccos(x), l'unique angle $\theta \in [0;\pi]$ solution de l'équation : $\cos(\theta) = x$.

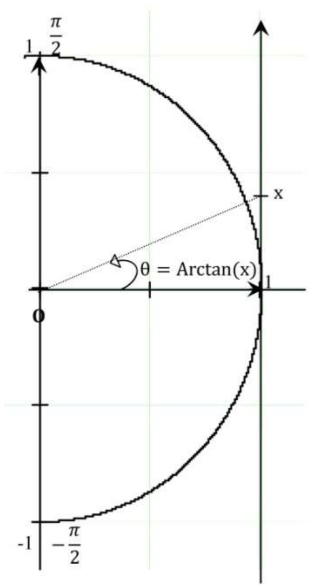
$\text{Arccos}(1)= 0$; $\text{Arccos}\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$

$\forall \theta \in [0;\pi] \quad \text{Arc}\cos(\cos(\theta)) = \theta$

$\forall x \in [-1;1] \quad \cos(\text{Arc}\cos(x)) = x$

$\text{Arc}\cos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)=\frac{5\pi}{12}$; $\text{Arc}\cos\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right)=\frac{7\pi}{8}$

Arctangente



Soit x∈ ℝ, on appelle Arctangente de x et on note Arctan(x), l'unique angle $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ solution de l'équation : $\tan(\theta) = x$.

$\text{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}$; $\text{Arctan}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$; $\text{Arctan}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$

$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \tan(\text{Arctan}(x)) = x$

$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\text{Arctan}(\tan(\theta)) = \theta$

tan(Arctan112)=112 ; $\text{Arc}\tan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{4}$

$\text{Arc}\tan\left(\tan\left(\frac{-\pi}{16}\right)\right)=-\frac{\pi}{16}$

Exercices d'application

Exercice 1 Compléter le tableau suivant : (k est un entier relatif : $k \in \mathbb{Z}$)

θ	-2π ; 8π ; $2k\pi$	π ; $-\pi$; 7π ; -5π	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{2}$	$\frac{27\pi}{4}$	$-\frac{47\pi}{6}$	$\frac{15\pi}{3}$	$\frac{28\pi}{6}$	$k\pi$
$\sin\theta$										
$\cos\theta$										
$\tan\theta$										

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes : (cela signifie qu'il faut trouver <u>toutes</u> les solutions de chacune de ces équations)

1) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **2)** $\cos(2t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **3)** $\sin(3\theta + \frac{\pi}{3}) = \frac{-1}{2}$

5) $\tan(x) = \sqrt{3}$

Exercice 3 Compléter : le bas de la page 14, les pages 21 et 22 , puis retrouver quelques formules indispensables de la page16.

Exercice 4 Résoudre les équations suivantes : (cela signifie qu'il faut trouver <u>toutes</u> les solutions de chacune de ces équations)

1) $\cos^2(x) - \sin^2(x) = -1$

2) $4.\cos^2(x) + (2 - 2\sqrt{3}).\cos(x) - \sqrt{3} = 0$

3) $\cos(2x) - 4\sin(x) + 3 = 0$

Exercice 5 Application de linéarisation (transformation d'un produit en somme)

1) Déterminer la valeur moyenne et la valeur efficace U_{eff} d'une tension sinusoïdale u définie par $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ (Voir définitions bas de la page 18).
2) Quelle est la valeur moyenne de la fonction f, définie par : $f(t) = 10 + 5\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$
3) Linéariser cos(x).cos(2x), puis en déduire la valeur de : $J = \int_0^{\pi} \cos(x) . \cos(2x)\, dx$

Exercice 6 Etudier la dernière partie de la page 19, puis déterminer:

Arctan(-1) ; Arctan(0) ; tan(Arctan189) ; $\text{Arctan}(\tan(-\frac{2\pi}{3}))$; $\text{Arctan}(\tan\frac{\pi}{20})$;

$\forall\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ $\quad \text{Arc}\tan(\tan(\theta))$

Compléter et retrouver le formulaire de trigonométrie :

1) $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) =$ ……………………………………………………………………...........

Justification : ....

....

2) Définition de tan(θ) = ………………………………………………………… $\theta \neq$ ……..

Alors : $1 + \tan^2(\theta) =$ ……………………………………………………………… $\theta \neq$ ……..

et : $1 + \tan^2(\theta) =$ ……………………………………………………………… $\theta \neq$ ……..

3) Rappeler les formules trigonométriques suivantes :

cos(a+b) =……………………………………………………………………….................

sin(a+b) =……………………………………………………………………….................

En <u>déduire</u> les formules suivantes :

cos(a-b) =……………………………………………………………………….................

cos(a-b) =……………………………………………………………………….................

sin(a-b) =……………………………………………………………………….................

sin(a-b) =……………………………………………………………………….................

sin(2a) =……………………………………………………………………….................

cos(2a) =………………………………………………………………………. ....

Exprimer cos(2a) en fonction de $\cos^2(a)$:

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

Exprimer cos(2a) en fonction de $\sin^2(a)$:

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

En <u>déduire</u> les formules de linéarisation de $\cos^2(a)$ et de $\sin^2(a)$ (traduction : transformer le produit $\cos^2(a)$ en somme, et faire de même avec $\sin^2(a)$)

…………………………………………………………………………………………........

…………………………………………………………………………………………........

…………………………………………………………………………………………........

…………………………………………………………………………………………........

…………………………………………………………………………………………........

…………………………………………………………………………………………........

4) Exprimer en le démontrant, tan(a+b) en fonction de tan(a) et tan(b) :

tan(a+b) =………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

En déduire tan(a-b) = ……………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

Puis, tan(2a) =……………………………………………………………………….....

…………………………………………………………………………………………...........

Partie C : Les nombres complexes

I. Définitions et notations du GEII

$$\underline{Z} = x + j.y \text{ où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = Im(\underline{Z})$

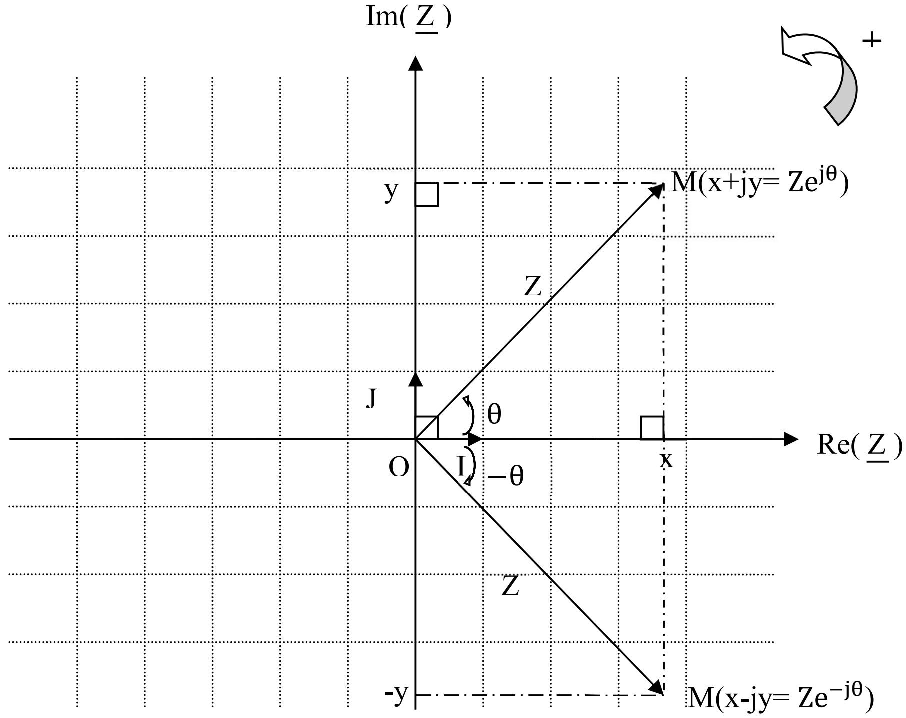
Le <u>module</u> de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $\left|\underline{Z}\right|$, c'est la distance de O à M, donc $\left|\underline{Z}\right| = Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

L'<u>argument</u> de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à 2kπ près (k ∈ ℤ). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$, on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Re(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Im(\underline{Z})}{Z} \end{cases} \quad \text{si } Z \neq 0.$$

Le <u>plan complexe</u> est muni d'un RON $(O\,;\vec{OI},\ \vec{OJ})$ orienté dans le sens direct.
$\underline{Z} = x + j.y$ où $x,y \in \mathbb{R}$

Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.
$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.
$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\vec{OM}$.
$\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$



<u>Forme algébrique</u> de $\underline{Z}$: (coordonnées cartésiennes)
$\underline{Z} = x + j.y$
<u>Forme trigonométrique</u> de $\underline{Z}$: (coordonnées polaires)
$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.(\cos(\theta) + j.\sin(\theta))$ **aussi noté :** $\underline{Z} = [Z\,,\theta]$
<u>Forme exponentielle, géométrique ou polaire</u> : Euler a noté $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$
$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$
<u>Nombre complexe conjugué</u> de $\underline{Z}$: Soit $\underline{Z} = x + j.y$, on appelle conjugué de $\underline{Z}$, et on note $\underline{Z}^*$, le nombre complexe défini par : $\underline{Z}^* = x - j.y$. Si $\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$, alors $\underline{Z}^* = Z.e^{-j\theta}$

II. Argument d'un nombre complexe

Comment obtenir θ l'argument d'un nombre complexe, lorsqu'il n'est pas remarquable ?

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul et $a \neq 0$.
Pour déterminer un argument de $\underline{Z}$, on calcule

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Si θ n'est pas un angle remarquable, alors on calcule : $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{b}{a}$.
On peut alors en déduire θ, en utilisant la fonction Arctangente, mais en faisant très attention, car Arctan(x)$\in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$!!! Voici deux exemples, dans lesquels θ est un angle remarquable :

Exemple 1 : $\underline{Z} = 1 + j.\sqrt{3} = 2e^{j\frac{\pi}{3}}$, donc arg($\underline{Z}$) = $\frac{\pi}{3}$ à $2k\pi$ près (ou modulo 2π)

Ici, $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ et alors : $\theta = \text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, ce qui correspond bien au résultat.

Exemple 2 : $\underline{Z} = -1 + j.\sqrt{3} = 2e^{j\frac{2\pi}{3}}$, donc arg($\underline{Z}$) = $\frac{2\pi}{3}$ à $2k\pi$ près (ou modulo 2π)

Ici, $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ et alors : $\theta = \text{Arctan}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, ce qui ne correspond pas du tout au résultat !!!!

Lorsque la partie réelle de $\underline{Z}$ est négative, la mesure principale de son argument θ n'est pas dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pour obtenir le bon résultat, il suffit donc d'ajouter ou de soustraire π à $\text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$

A retenir

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul, tel que $a \neq 0$.

$$\arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \text{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \text{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

III. Propriétés et Opérations

Soient : $\underline{Z} = x + j.y = Z.e^{j.\theta} = [Z\,,\theta]$ et $\underline{Z'} = x'+j.y' = Z'.e^{j.\theta'} = [Z'\,,\theta']$ deux nombres complexes

1) Egalité entre deux nombres complexes

$$\boxed{\underline{\mathbf{Z}} = \underline{\mathbf{Z'}} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathbf{Re}(\underline{\mathbf{Z}}) = \mathbf{Re}(\underline{\mathbf{Z'}}) \\ \mathbf{Im}(\underline{\mathbf{Z}}) = \mathbf{Im}(\underline{\mathbf{Z'}})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|\underline{\mathbf{Z}}| = |\underline{\mathbf{Z'}}| \\ \theta = \theta' + 2.\mathbf{k}.\pi\end{cases}}$$

2) Addition de deux nombres complexes (utiliser l'écriture algébrique si possible)

$$\underline{Z} + \underline{Z'} = x + x' + j.(y + y')$$

On en déduit que : $\boxed{\mathbf{Re}\left(\underline{\mathbf{Z}}+\underline{\mathbf{Z'}}\right) = \mathbf{Re}(\underline{\mathbf{Z}}) + \mathbf{Re}(\underline{\mathbf{Z}}') \text{ et } \mathbf{Im}\left(\underline{\mathbf{Z}}+\underline{\mathbf{Z'}}\right) = \mathbf{Im}(\underline{\mathbf{Z}}) + \mathbf{Im}(\underline{\mathbf{Z}}')}$

3) Multiplication de deux nombres complexes (Rappel : $e^a.e^b = e^{a+b}$) (utiliser l'écriture exponentielle si possible)

$$\underline{Z}.\underline{Z'} = Ze^{j.\theta}.Z'e^{j.\theta'} = Z.Z'e^{j(\theta+\theta')}$$

On en déduit que : $\boxed{\mathbf{arg}\left(\underline{\mathbf{Z}}.\underline{\mathbf{Z'}}\right) = \mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Z}}) + \mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Z}}') + 2\mathbf{k}\boldsymbol{\pi}\,,\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\,, \text{ et } |\underline{\mathbf{Z}}.\,\underline{\mathbf{Z}}'| = |\underline{\mathbf{Z}}|.|\underline{\mathbf{Z}}'|}$

Ou encore que : $\boxed{[\mathbf{Z}\,,\boldsymbol{\theta}] \times [\mathbf{Z}'\,,\boldsymbol{\theta}'] = [\mathbf{ZZ}'\,,\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}']}$

4) Quotient (Rappel : $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$) (utiliser l'écriture exponentielle si possible)

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}} = \frac{Ze^{j.\theta}}{Z'e^{j.\theta'}} = \frac{Z}{Z'}e^{j(\theta-\theta')}$$

On en déduit que : $\boxed{\mathbf{arg}\left(\frac{\underline{\mathbf{Z}}}{\underline{\mathbf{Z'}}}\right) = \mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Z}}) - \mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Z}}') + 2\mathbf{k}\boldsymbol{\pi}\,,\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\,, \text{ et } \left|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right| = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z}'|}}$

Ou encore que : $\boxed{\frac{[\mathbf{Z}\,,\boldsymbol{\theta}]}{[\mathbf{Z}'\,,\boldsymbol{\theta}']} = [\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}'}\,,\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}']}$

Cas particulier : (Rappel : $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$) $\quad \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z.e^{j.\theta}} = \frac{1}{Z}.e^{-j.\theta}$ avec $\underline{Z} \neq 0$.

on en déduit que : $\boxed{\mathbf{arg}\left(\frac{\mathbf{1}}{\underline{\mathbf{Z}}}\right) = -\,\mathbf{arg}(\underline{\mathbf{Z}}) + 2\mathbf{k}\boldsymbol{\pi},\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\,, \text{ et } \left|\frac{1}{\underline{Z}}\right| = \frac{1}{|\underline{Z}|}}$

Ou encore que : $\boxed{\frac{\mathbf{1}}{[\mathbf{Z}\,,\boldsymbol{\theta}]} = [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Z}}\,,-\boldsymbol{\theta}]}$

5) Puissances $n^{ième}$ d'un nombre complexe (n est un entier naturel) (utiliser l'écriture exponentielle si possible)

(Rappel : $\left(e^{p}\right)^{n} = e^{p.n}$ et $(a.b)^{n} = a^{n}.b^{n}$)

$$\underline{Z}^{n} = \left(Ze^{j.\theta}\right)^{n} = Z^{n}.e^{n.j.\theta}$$

On en déduit que : $\boxed{\mathbf{arg}\left(\underline{Z}^{n}\right) = \mathbf{n} \times \mathbf{arg}(\underline{Z}) + \mathbf{2k\pi}\ ,\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\ ,\ \mathbf{et}\ \left|\underline{Z}^{n}\right| = \left|\underline{Z}\right|^{n}}$

Ou encore que : $\boxed{[\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}]^{n} = [\,Z^{n}, \mathbf{n}.\boldsymbol{\theta}]}$

6) Dérivée et primitive (Rappel : on note $\frac{d}{dx}(f(x))$ la dérivée de la fonction f par rapport à la variable x. $\frac{d}{dx}\left(e^{a.x}\right) = a \times e^{ax}$)

$$\boxed{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d\theta}}(\underline{\mathbf{Z}}) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d\theta}}\left(\mathbf{Ze}^{j.\theta}\right) = \mathbf{j.Z.e}^{j.\theta} = \mathbf{j.}\underline{\mathbf{Z}}}$$

« Dériver par rapport à θ c'est multiplier par j »

(Rappel : $a \neq 0$. Une primitive de $e^{a.x}$ par rapport à x est : $\frac{1}{a} \times e^{ax}$)

$$\boxed{\textbf{Une primitive de } \underline{Z} \textbf{ par rapport à } \theta \textbf{ est } \frac{\underline{\mathbf{Z}}}{\mathbf{j}} = -\mathbf{j.}\underline{\mathbf{Z}}}$$

« Intégrer par rapport à θ c'est multiplier par –j »

IV. Formules importantes

1) Opérations sur le **conjugué** d'un nombre complexe

$$\left(\underline{\mathbf{Z}} + \underline{\mathbf{Z'}}\right)^{*} = \underline{\mathbf{Z}}^{*} + \underline{\mathbf{Z'}}^{*} \qquad \left(\underline{\mathbf{Z}}.\underline{\mathbf{Z'}}\right)^{*} = \underline{\mathbf{Z}}^{*}.\underline{\mathbf{Z'}}^{*} \qquad \left(\frac{\underline{\mathbf{Z}}}{\underline{\mathbf{Z'}}}\right)^{*} = \frac{\underline{\mathbf{Z}}^{*}}{\underline{\mathbf{Z'}}^{*}} \quad \left(\underline{\mathbf{Z}}^{n}\right)^{*} = \left(\underline{\mathbf{Z}}^{*}\right)^{n}$$

2) Formules d'Euler

$\underline{Z} + \underline{Z}^{*} = a + jb + a - jb = 2a$; $\underline{Z} - \underline{Z}^{*} = a + jb - (a - jb) = 2jb$; $\underline{Z}.\underline{Z}^{*} = \mathbf{Z.\,e^{j\theta}\,Z.\,e^{-j\theta} = Z^{2}}$

$$\boxed{\underline{\mathbf{Z}} + \underline{\mathbf{Z}}^{*} = \mathbf{2.Re}(\underline{\mathbf{Z}}) \quad ; \quad \underline{\mathbf{Z}} - \underline{\mathbf{Z}}^{*} = \mathbf{2.j.Im}(\underline{\mathbf{Z}}) \quad ; \quad \underline{\mathbf{Z}}.\underline{\mathbf{Z}}^{*} = \mathbf{Z}^{2}}$$

Cas particulier : $\underline{Z} = e^{j\theta}$

$$\underline{Z}+\underline{Z}^* = e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\mathrm{Re}\left(e^{j\theta}\right) = 2\cos\theta \;\; ; \;\; \underline{Z}-\underline{Z}^* = e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\mathrm{Im}\left(e^{j\theta}\right) = 2j\sin\theta$$

$$\boxed{\textbf{Formules d'Euler : } \cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}}$$

3) Formule de Moivre

$$\left(\cos(\theta)+j.\sin(\theta)\right)^n = \left(e^{j\theta}\right)^n = e^{jn\theta} = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

$$\boxed{\textbf{Formule de Moivre : } \left(\cos(\theta)+j\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta)+j\sin(n\theta)}$$

Exercices d'application

Exercice 1 Sur les pages 29 à 31, compléter la grille de nombres complexes.

Exercice 2 Ecrire chacun des nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

$2.e^{j\frac{\pi}{4}}.e^{j\frac{\pi}{6}}$; $-3.e^{j\frac{\pi}{7}}$; $\dfrac{\left(-\sqrt{3}+j\right)^4}{(1-j)^5}$; $\dfrac{e^{-j\frac{\pi}{3}}}{j(-1+j)}$; $1+e^{j\theta}$

Exercice 3 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$\underline{Z}_1 = 4+3j$; $\underline{Z}_2 = -5+3j$; $\underline{Z}_3 = \sqrt{7} - j\sqrt{2}$

$\underline{Z}_4 = R + j.L.\omega$ (impédance complexe d'u circuit RLC en parallèle) ; $\underline{Z}_5 = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{j.L.\omega} + j.C.\omega$

où R, L,C et ω sont des nombres réels non nuls. ; $\underline{Z}_6 = \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}$ (R, L et ω sont des réels strictement positifs.) $\underline{Z}_7 = \frac{(1+jx)^{10}}{(1-jx)^6}$ où x est un nombre réel.

Exercice 4 En utilisant la formule d'Euler, linéariser les expressions : $\sin^3 x$ (on développera d'abord $(a-b)^3$) et sinx.cos(2x).sin(3x). En déduire la valeur des intégrales suivantes :

$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3(t)dt$ et $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(\theta)\cos(2\theta)\sin(3\theta)\,d\theta$

Exercice 5 Soit $\underline{U} = \underline{I}\left(R - \frac{j}{C\omega}\right)$ l'expression complexe de la tension aux bornes de l'association en série comprenant une résistance R et un condensateur C. Déterminer le module et un argument de I, nombre complexe associé à l'intensité i du courant dans le circuit.

Exercice 6 Résolution d'équations du second degré :

1) Rappel : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$:
pour résoudre P(x) = 0. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, P possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, P possède une racine réelle double : $x_1 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, P possède deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b+j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Résoudre l'équation $1 + z + z^2 = 0$

2) Si a, b et c sont des nombres complexes : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c complexes et $a \neq 0$:
pour résoudre P(x) = 0. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ qui est un nombre complexe. On cherche alors les racines carrées de Δ, par définition, ce sont les deux solutions δ_1 et δ_2 de l'équation : $\delta^2 = \Delta$

P possède alors deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\delta_1}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\delta_2}{2a}$

a) Résoudre l'équation : $z^2 + 2(1+j)z + 4j = 0$
b) Résoudre l'équation : $z^2 + (2-j)z - 2j = 0$

$\underline{Z}=x+jy$ $\underline{Z}=Z.\,e^{j\theta}$ $\underline{Z}=[Z\,,\theta]$	**Re(** $\underline{Z}$ **) = x** **Re(** $\underline{Z}$ **) = Z.cosθ**	**Im(** $\underline{Z}$ **) = y** **Im(** $\underline{Z}$ **) = Z.sinθ**	$\left\lvert\underline{Z}\right\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ $\left\lvert\underline{Z}\right\rvert=Z$	**Arg(** $\underline{Z}$ **)=θ**	**Ecriture exponentielle ou algébrique**	**Conjugué :** $\underline{Z}^*=x-jy$ $\underline{Z}^*=Z.\,e^{-j\theta}$ $\underline{Z}^*=[Z\,,-\theta]$
$\underline{Z_1}=5$						
$\underline{Z_2}=-3j$						
$\underline{Z_3}=\sqrt{3}+j$						
$\underline{Z_4}=\sqrt{3}-j$						
$\underline{Z_5}=-1+j$						
$\underline{Z_6}=-4-4j\sqrt{3}$						
$\underline{Z_7}=e^{j\frac{\pi}{2}}$						
$\underline{Z_8}=e^{j\pi}$						
$\underline{Z_9}=e^{2j\pi}$						

$\underline{Z_{10}}$ =[7 , - $\frac{\pi}{3}$]						
$\underline{Z_{11}} = e^{kj\pi}$; k$\epsilon\mathbb{Z}$						

Notes :

....

....

....

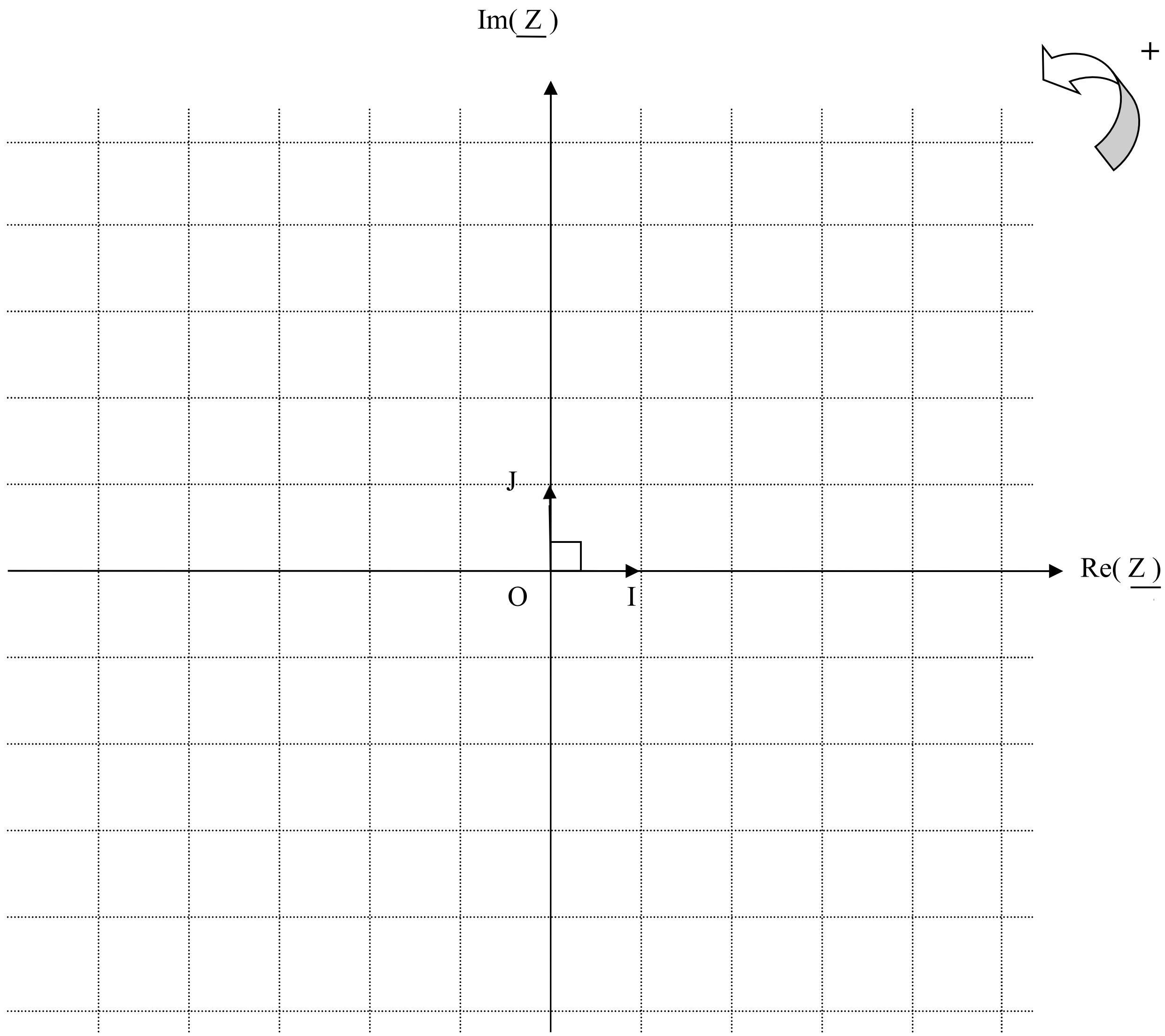
....

....

....

....

....


Im(Z)
+
J
O
I
Re(Z)

Partie D : Résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

I. Définitions

On appelle <u>équation différentielle du premier ordre</u>, toute équation dans laquelle interviennent une fonction et sa dérivée.

<u>Exemples</u>

- ✓ $f' = f$, que l'on peut écrire aussi : $f'(x) = f(x)$ ou encore : $\frac{df}{dx} = f$, ou encore : $\frac{df}{dx}(x) = f(x)$.
- ✓ $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$, que l'on peut écrire aussi : ……………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………………
- ✓ $(x+1)y.y' + y^2 = \frac{x.y^3}{2}$, que l'on peut écrire aussi : ……………………………………

  ……………………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………………

Résoudre sur un intervalle I une équation différentielle c'est déterminer l'ensemble des fonctions dérivables sur I qui vérifient cette équation.

<u>Exemple</u>

- ✓ Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$: $y' - 4y = 0$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………

II. Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

1) Définition

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants toute équation de la forme :
$y'(x) + a.y(x) = f(x)$ où a est une constante réelle et f une fonction continue sur un intervalle I, appelée second membre de l'équation.

Exemples

$2y' - y = x^3 - x + 2$; $2.y' - 3.y = \cos x - 2\sin x$; $y' - 2y = e^{2x}(x^2 - 3)$

2) Résolution de l'équation dite «sans second membre » : y'(t) +a.y(t) = 0 où a est une constante réelle :

…………………………………………	…………………………………………
…………………………………………	…………………………………………
…………………………………………	…………………………………………
…………………………………………	…………………………………………
…………………………………………	…………………………………………
…………………………………………	…………………………………………
…………………………………………	…………………………………………
…………………………………………	…………………………………………
…………………………………………	…………………………………………
…………………………………………	…………………………………………
…………………………………………	…………………………………………
…………………………………………	…………………………………………

3) Théorème admis

Théorème : Soit (E), une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants : $y'(x)+a.y(x)=f(x)$ (E) (où a est une constante réelle et f est une fonction continue sur I).
Pour résoudre (E) sur I, on procède en deux étapes :

Etape 1 : On résout l'équation homogène (ou sans second membre) associée :

$$(E_0)\quad y'(x)+a.y(x)=0$$

Les solutions de (E_0) sont : $y_0(x)=\lambda.e^{-ax}$ où λ est une constante réelle.

Etape 2 : On recherche une solution particulière de (E) $y'(x)+a.y(x)=f(x)$, que l'on note y_p.

Conclusion : Les solutions de (E) sont alors toutes les fonctions de la forme : $y(x)=y_0(x)+y_p(x)$. Elles sont aussi appelées « solution générale » de (E) et notées y_G

4) Recherche d'une solution particulière

Dans les cas les plus courants, on cherchera une solution particulière de l'équation $\frac{dy}{dt}+a.y=f(t)$ (E), du même type que la fonction f apparaissant au second membre de (E).

Forme du second membre $t \mapsto f(t)$	Forme de la solution particulière cherchée $t \mapsto y_p(t)$
$f(t)=$ constante	$y_p(t)=$ constante
$f(t)=$ polynôme	$y_p(t)=$ polynôme de même degré
$f(t)=\alpha.\cos(mt)+\beta.\sin(mt)$ où α,β et m sont des réels	$y_p(t)=A.\cos(mt)+B.\sin(mt)$ où A et B sont des constantes.
$f(t)=g(t).e^{m.t}$ où m est un réel.	$y_p(t)=z(t).e^{m.t}$

Exemples :

- ✓ Résoudre l'équation (E) sur ℝ : $2y'-3y=t+1$

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

- ✓ Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$: $3\frac{dy}{dx} - 2y = e^{2x}(x^2 - 3)$

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

Théorème de superposition (lorsque le second membre de (E) est une somme de fonctions)
Soit l'équation à résoudre : $\frac{dy}{dt} + a.y = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ **(E),**
Si $t \mapsto y_1(t)$ **est une solution particulière de l'équation** $\frac{dy}{dt} + a.y = f_1(t)$ **,**
Si $t \mapsto y_2(t)$ **est une solution particulière de l'équation** $\frac{dy}{dt} + a.y = f_2(t)$**,**
Et si $t \mapsto y_3(t)$ **est une solution particulière de l'équation** $\frac{dy}{dt} + a.y = f_3(t)$ **,**
Alors la fonction $t \mapsto y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ **est une solution particulière de (E) .**

Remarque Ce résultat s'étend au cas où f, le second membre de (E) est la somme d'un nombre quelconque de fonctions.

Exemple Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$: $3\frac{dy}{dx} - 2y = e^{2x}(x^2 - 3) + x^2$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5) Equation différentielle linéaire du premier ordre avec condition initiale

Définition / Théorème L'équation différentielle linéaire du premier ordre(E) $y'(x) + a.y(x) = f(x)$ possède une infinité de solutions sur I notées : $y_G(t)=y_0(t)+y_p(t)$. Il existe une unique solution y de (E) sur I, vérifiant la condition initiale : $y(t_0)=y_0$, où t_0 et y_0 sont des valeurs données dans l'énoncé du problème.

Exemple Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $3\frac{dy}{dx} - 2y = e^{2x}(x^2 - 3) + x^2$ avec la condition initiale : y(0) = 1

....

....

....

....

....

....

....

Exercices d'application

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'+y=x^2$ (E)

2) $\begin{cases} 3y'(t)+7y(t) = -2 \\ y(0)=1 \end{cases}$

3) $y'+2.y=3\cos(2x)$

4) $y'-2y=e^{-3x}(x+1)$

Exercice 2 Dans un circuit RC en série, on a l'équation différentielle (E) suivante : $\tau\dfrac{ds}{dt}+s(t)=e(t)$ où e(t) et s(t) sont les signaux respectivement d'entrée et de sortie et $\tau = RC$

a) Résoudre (E) lorsque e(t) = E où E est une constante. Que se passe-t-il lorsque s(0) = 0 ?

b) Résoudre (E) lorsque e(t) = cos(ωt)où ω est une constante.

Que se passe-t-il lorsque s(0) = 0 ?

Exercices d'entraînement pour les poursuites d'études longues

Exercice 1 La valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$ est : **1)** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ou bien **2)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$?

Exercice 2 a est un nombre réel quelconque et $E = \cos a - \sin a$. Quelle est la bonne réponse ?

1) $E = \cos(2a)$ **2)** $E = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$ **3)** $E = \sin(2a)$

Exercice 3 Transformation d'une somme en produit et application et résolution d'équation

1) Simplifier cos(a+b)-cos(a-b), et en déduire la formule suivante :

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

2) Résoudre alors l'équation suivante : $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(\frac{3x}{2})$

Exercice 4

1) Ecrire autrement l'expression $A.\cos(\omega.t + \varphi)$

2) Soit $f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t)$, déterminer A>0 et φ tels que :
$f(t) = A.\cos(\omega.t + \varphi)$.

3) Exprimer sous la forme précédente les fonctions suivantes, puis en déduire leur amplitude.
$f_1(t) = \cos(t) - \sin(t)$ et $f_2(t) = \cos(\omega t) + \sqrt{3}\sin(\omega t)$

Exercice 5 $\text{Arcsin}(\frac{\sqrt{3}}{2})$; $\text{Arcsin}(0)$; $\sin(\text{Arcsin}\frac{3}{5})$; $\text{Arcsin}(\sin\frac{-\pi}{6})$; $\text{Arcsin}(\sin\frac{5\pi}{7})$;

$\text{Arccos}(-1)$; $\text{Arccos}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; $\text{Arccos}(0)$; $\cos(\text{Arccos}\frac{113}{114})$; $\text{Arccos}(\cos\frac{2\pi}{3})$;

$\text{Arccos}(\cos\frac{-8\pi}{7})$; $\text{Arctan}(\sqrt{3})$;

Exercice 6 Simplifier sin(Arccosx), on précisera son ensemble de définition.

Exercice 7 Résoudre l'équation : $\text{Arccos}(x)+\text{Arccos}(\frac{4}{5})=\frac{\pi}{2}$

<u>Exercice 8</u> (pour le calcul intégral)

On pose $t = \tan(\frac{a}{2})$, en déduire les formules suivantes : $\begin{cases} \sin(a) = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos(a) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan(a) = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$

<u>Exercice 9</u> Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $\underline{Z} = \dfrac{1+j.\tan\theta}{1-j.\tan\theta}$, puis l'écrire sous forme géométrique.

b) $\underline{Z} = e^{4jx} + e^{2jx}$ où $x \in [0, \pi]$. (Indication : factoriser par e^{3jx})

c) $\underline{Z} = \ln x.e^{jx}$; $0<x<1$

<u>Exercice 10</u> Pour aller plus loin…. Simplifier l'expression suivante :
$C = 1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + ... + \cos(n\theta)$

<u>Indication</u> : Montrer que C est la partie réelle de $S = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + ... + e^{in\theta}$, et on rappelle la formule : $1 + a + a^2 + ... + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$; avec $a \neq 1$

Annales du concours d'entrée à l'ITII (école d'ingénieur par apprentissage)

Question 1Calculer :

$$\cos^6 x - \cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^4 x + \sin^6 x =$$

Exprimer $cos^2\, a$ et $sin^2\, a$ en fonction de $cos\, 2a$:

$cos^2\, a =$	$sin^2\, a =$

En déduire des réels a, b, c, d tels que l'égalité ci-dessous soit valable pour tout réel x :

$$\cos^6 x - \sin^6 x = a + b\cdot\cos 2x + c\cdot\cos 4x + d\cdot\cos 6x$$

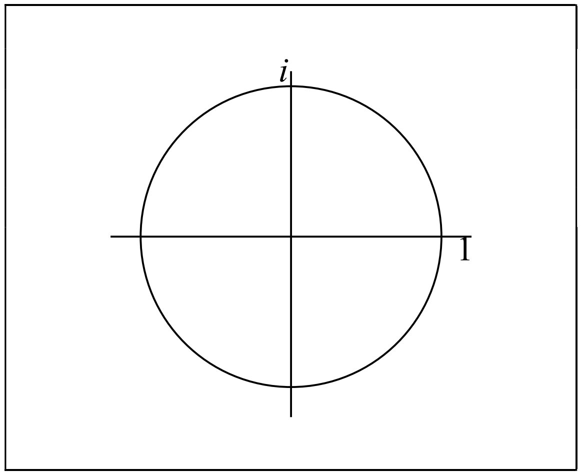
$a =$ $\quad$ $b =$ $\quad$ $c =$ $\quad$ $d =$

Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^6 x - \sin^6 x\right) dx =$$

Annales du concours d'entrée à l'ITII

(a)Placer sur la figure ci-dessous les solutions de l'équation $z^3 = i$:



(b)Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = i$. Calculer les valeurs possibles de la fonction *f(z)* ci dessous lorsque z parcourt S, puis calculer la somme de ces valeurs :

$$f(z) = \frac{1+z+z^2+z^3+z^4+z^5}{1-\overline{z}} \qquad (z \neq 1)$$

$$z \in S \ \Rightarrow \ f(z) =$$

$$\sum_{z \in S} f(z) =$$

(c)On considère l'équation : $\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^n - \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^n = i\sqrt{2} \quad , \quad (|z| \neq 0)$, et on note S^* l'ensemble de ses solutions.

$$z \in S^* \Rightarrow \begin{cases} \textit{Le module de z est de la forme } \rho = \\ \\ \textit{L'argument de z est de la forme } \theta = \end{cases}$$

Pour $n=2$ tracer sur la figure ci dessus les éléments de S^* tels que $|z| \leq 1$.

Minuscule	Majuscule	Se lit
α	Α	alpha
β	Β	bêta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε	Ε	epsilon
ζ	Ζ	dzêta
η	Η	êta
θ	Θ	thêta
ι	Ι	iota
κ	Κ	kappa
λ	Λ	lambda
μ	Μ	mu
ν	Ν	nu
ξ	Ξ	xi
o	Ο	omicron
π	Π	pi
ρ	Ρ	rhô
σ	Σ	sigma
τ	Τ	tau
υ	Υ	upsilon
φ	Φ	phi
χ	Χ	khi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	Oméga

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………