Chapitre 6 : Variables aléatoires - Partie A : Variables aléatoires discrètes

I. Définitions :

1) Problème : Contre une mise convenable, on lance un dé équilibré marqué : As, Roi, Dame, Valet, Dix, Neuf. L'As rapporte 10€, le Roi 6€, la Dame 6€, le Valet 5€, le Dix 0€ et le Neuf 0€. Quelle doit être la mise pour que le jeu soit équitable ?

- ✓ Description de l'expérience :

  Expérience : ....

  Univers : ....

  Probabilité : ....

- ✓ On note X : le gain obtenu après un lancer :

  Ensemble des valeurs prises par X : ....

  On note (X=10) : l'événement « obtenir 10€ après un lancer ».

  P(X=10)=..

  P(X=6)= ....

  P(X=5)= ....

  P(X=0)= ....

  On consigne ces résultats dans le tableau suivant :

x				
P(X=x)				

$P((X=10) \cup (X=6) \cup (X=5) \cup (X=0))$ =...

....

$P(6 \leq X \leq 10)$=...

$P(X<6)$=..

$P(\overline{X<6})$=..

$P((6 \leq X \leq 10) \cap (0 \leq X \leq 7))$=..

X est appelée variable aléatoire, et le tableau précédent représente sa loi de probabilité

Gain obtenu en moyenne après un lancer :

E(X)=...

- ✓ Réponse au problème : ....

2) Définitions :

Soit E une expérience aléatoire, S son univers associé. On peut attribuer un nombre X à chacun des résultats de E. X est alors appelé variable aléatoire, si de plus S est un ensemble dénombrable (i.e : contenant des éléments distincts et isolés) X est dite discrète. Supposons que S est un ensemble contenant un nombre fini d'éléments. On note $X(S)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X .

- ✓ **La loi de probabilité de X est la donnée de $p_1=P(X=x_1)$, $p_2=P(X=x_2),\dots,p_n=P(X=x_n)$, elle peut se présenter sous forme de tableau :**

x	x_1	x_2	…	x_n
P(X=x)	p_1	p_2	…	p_n

$$P((X=x_1)\cup(X=x_2)\cup\dots\cup(X=x_n))=P(X=x_1)+P(X=x_2)+\dots+P(X=x_n)=p_1+p_2+\dots+p_n=1$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

- ✓ **On appelle Espérance mathématique de la variable aléatoire X (moyenne espérée) la valeur notée :**

$$E(X)=x_1.P(X=x_1)+x_2.P(X=x_2)+\dots+x_n.P(X=x_n)=x_1.p_1+x_2.p_2+\dots+x_n.p_n.$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i.p_i .$$

- ✓ **La fonction de répartition de X est la fonction F définie soit par : $F(x)=P(X<x)$ ou $F(x)=P(X\le x)$. $P(X\le x_i)=p_1+p_2+\dots+p_i$.**
- ✓ **On appelle Variance de la variable aléatoire X la valeur notée :**

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

- ✓ **On appelle Ecart-type de la variable aléatoire X la valeur notée : $\sigma_X=\sqrt{V(X)}$.**

L'écart-type permet d'estimer la dispersion de la probabilité autour de la moyenne.

II. Loi de probabilité binômiale :

1) Définition :

Soit E une expérience aléatoire à deux résultats possibles : S={ s : succès ; e : échec }.
On répète n fois de façon indépendante l'expérience E
La probabilité d'un succès qu'on note p est la même pour toutes les n expériences E.
Soit X, la variable aléatoire représentant le nombre de succès obtenus sur les n expériences . ($X(S)=\{0,1,2,\dots,n\}$, X est discrète.)
On dit alors que X suit la loi Binômiale de paramètres n et p, que l'on note B(n ;p), on peut alors calculer P(X=k), la probabilité d'obtenir k succès sur n expériences par la formule suivante : $P(X=k)=C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k}$ avec $0\le k\le n$.

2) Exemple 1 **:** Retrouvons cette formule sur un exemple.
On répète 4 fois de façon indépendante une expérience **E** à 2 issues s et e, avec p=p(s).
On s'intéresse à X le nombre de succès obtenus sur ces 4 expériences.
D'après la définition précédente X suit la loi de probabilité :
Sans utiliser la formule ci-dessus, complétons le tableau de loi de probabilité de X :

x					
P(X=x)					

Pour cela complétons d'abord le tableau ci-dessous :

	N° des épreuves 1 2 3 4	Nombre de possibilités
X=0		
X=1		
X=2		
X=3		
X=4		

3) Exemple 2 **:** On lance une pièce de monnaie truquée telle que P(P)=1/3 et P(F)=2/3. On exécute cette expérience 5 fois de façon indépendante.

……………………………………………………………………………………………………

Calculer la probabilité d'obtenir exactement 3 Pile : ....

Calculer la probabilité d'obtenir plus de 2 Pile : ....

4) **$E(X), V(X), \sigma_X$:**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité B(n ;p), alors :

E(X)=n.p **V(X)=n.p.(1-p)** $\boldsymbol{\sigma_X = \sqrt{n.p.(1-p)}}$

En effet,

……………………………………………………………………………………………………

……

……

……

III. Loi de Poisson :

1) Théorème :

Soit l'expression de la loi binômiale B(n,p) :

$$f(k) = C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k}.$$

Quand n tend vers l'infini et p tend vers zéro, avec np = m constante, f(k) tend vers :

$$g(k) = e^{-m}.\frac{m^k}{k!}$$

2) Définition :

Soit X une variable aléatoire suivant le loi binômiale B(n,p) avec n grand et p petit alors :

$$P(X = k) = C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k} \quad \text{avec } 0 \le k \le n.$$

Si n>50 et np$\le$ 5, on peut remplacer la loi binômiale B(n,p) par la loi de Poisson notée P(m) où m=n.p, avec :

$$P(X = k) = e^{-m}.\frac{m^k}{k!}.$$

En fait, cette approximation est possible jusqu'à n.p=10, et même davantage, mais en sacrifiant de la précision.

3) Exemples :

Soit la loi binomiale B(50 ;0,04) et la loi de Poisson P(2), on peut comparer les résultats dans le tableau ci-dessous :

x	0	2	5
loi binomiale P(X=x)	0,130	0,276	0,035
loi de Poisson P(X=x)	0,135	0,271	0,036

Même calculs pour les lois B(50 ;0,20) et P(10).

x	0	2	5
loi binomiale P(X=x)	$1,4.10^{-5}$	0,0295	0,1398
loi de Poisson P(X=x)	$4,5.10^{-5}$	0,0378	0,1251

4) $E(X), V(X), \sigma_X$:

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité P(m), alors :

E(X)=m **V(X)=m** $\sigma_X = \sqrt{m}$

Partie B : Variables aléatoires continues

I. Variable aléatoire continue :

1) Définition : Nous avons vu que l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire discrète X est dénombrable (i.e : X prend des valeurs distinctes et isolées). Une variable aléatoire X est dite continue lorsqu'elle peut prendre n'importe quelles valeurs réelles d'un intervalle de définition .

- ✓ Une variable aléatoire discrète peut représenter : le nombre de personnes par foyer, le nombre de pièces défectueuses dans un échantillon, …
- ✓ Une variable aléatoire continue représente souvent une mesure : durées observées jusqu'à la défaillance d'un appareil, masse du contenu d'un sac de céréales, diamètre d'un cylindre, …

Une variable aléatoire continue peut aussi représenter une valeur discrète lorsque celle-ci est très grande (plusieurs milliers) : moyenne mensuelle du nombre d'acheteurs éventuels rencontrés par un représentant de commerce au cours de l'année précédente…

Il est donc impossible de faire une liste des valeurs prises par une variable aléatoire continue et d'attribuer à chacune une probabilité, dans ce cas, on construit une « fonction de densité » de probabilité que l'on représentera par une « courbe de probabilité » .

2) Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue :

Exemple : Soit X la variable aléatoire prenant comme valeur la durée de vie d'une ampoule électrique choisie parmi un lot de même fabrication. L'expérience montre que X suit une loi de densité f donnée par : $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}.e^{-\frac{t}{\theta}} & \text{si } t \geq 0. \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$ où $\theta > 0$.

Monter que f est bien une densité de probabilité, puis calculer $p(X<t)$ où $t>0$, $E(X)$ et $V(X)$.

Représentation graphique :

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

II. Loi de probabilité normale :

1) Introduction :

La loi normale, ou loi de Laplace-Gauss, s'applique à « une variable aléatoire continue dépendant de nombreux paramètres indépendants, dont les effets s'additionnent et dont aucun n'est prépondérant. » (Conditions de Borel.)
Elle est donc naturellement le modèle mathématique des phénomènes dont les causes sont à la fois nombreuses et mal connues sans qu'on puisse détecter entre elles de prépondérance.
Exemples : phénomènes soumis à des perturbations : température, hygrométrie, pression atmosphérique, vibrations, défaut d'homogénéité dans la matière, imprécision des appareils de mesure, usure de l'outillage, etc.

La fonction « densité de probabilité » d'une variable aléatoire continue X qui suit une loi normale de paramètres positifs m et σ est de la forme : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

2) Etude de la loi de probabilité N(m, σ) :

- ✓ Représentation graphique :

- ✓ f est une densité de probabilité : On vérifie que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$.

……

……

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

- ✓ $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = P(a < X < b)$..
- ✓ $\mathbf{E(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x.e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = m$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

- ✓ **V(X)=σ^2 .**

3) <u>Utilisation du tableau de la loi normale centrée réduite N(0 ;1)</u> :

- ✓ Soit X une variable aléatoire suivant la loi N(0 ;1), sans calculer d'intégrale on peut par lecture du tableau de la loi normale obtenir :

P(X<2)=……………………………………………………………………………….

P(X>1)= ……………………………………………………………………………….

P(X<-2)= ……………………………………………………………………………….

P(X>-1)= ……………………………………………………………………………….

P(-1<X<2)= ………………………………………………………………………….

- ✓ Soit X une variable aléatoire suivant la loi N(m ; σ), on peut alors se ramener à la loi normale centrée réduite N(0 ;1) en faisant un changement de variable aléatoire :

Si X suit la loi N(m ; σ), alors la variable $T = \frac{X - m}{\sigma}$ suit la loi N(0 ;1) :

$$P(X < x) = P(T < \frac{x - m}{\sigma}).$$

Exemple : Soit X une variable suivant la loi N(6 ;2), alors T=$\frac{X-6}{2}$ suit la loi N(0 ;1) et :

P(X<7)= ……………………………………………………………………………….

$P(4<X<8)=$ ……………………………………………………………………………………

4) Opérations sur les variables gaussiennes :

- ✓ Théorème 1 : Soit $X_1, X_2, \dots X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi normale $N(m_i\,;\sigma_i)$. Leur somme : $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit aussi une loi normale $N(m\,;\,\sigma)$ où $m=\sum_{i=1}^{n} m_i$ et $\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$.
- ✓ Théorème 2 : Si une variable X suit la loi $N(m\,;\,\sigma)$, la variable $Y=-X$ suit la loi $N(-m\,;\,\sigma)$.
- ✓ Théorème 3 : Si une variable aléatoire X suit la loi $N(m\,;\,\sigma)$, la variable $Y=aX$ $(a>0)$ suit la loi $N(am\,;a\sigma)$.
- ✓ Théorème 4 : Soit $X_1, X_2, \dots X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi normale $N(m_i\,;\sigma_i)$. Alors leur moyenne $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ suit la loi $N(m\,;\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ où $m=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n}$ et $\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{n^2}$.

III. Approximation d'une loi binômiale par la loi normale :

1) Pour tout x entier naturel,

$$\lim_{x\to\infty} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} .$$

En posant : $m=np$ et $\sigma=\sqrt{npq}$ $(q=1-p)$, on considère que la convergence est satisfaisante pour $npq>10$.

2) Application :

Soit X une variable aléatoire discrète suivant la loi $B(n\,;p)$ tel que $npq>10$, on approche cette loi par la loi $N(np, \sqrt{npq})$.

Soit Y une variable aléatoire continue suivant la loi $N(np, \sqrt{npq})$, on peut alors calculer :

$P(X=a)=P(a-0{,}5<Y<a+0{,}5)$

$P(X<b)=P(Y<b-0{,}5)$

$P(X\leq b)=P(Y<b+0{,}5)$

Exemple

On a remarqué que parmi les gens qui entrent dans un certain centre commercial, 70% en ressortent avec au moins un achat. On prélève un échantillon de n=50 personnes, au hasard.

a) Quelle est la probabilité pour qu'au moins 40 d'entre elles aient effectué chacun un achat ou plus ?

b) Quelle est la probabilité pour que moins de 30 des 50 personnes de l'échantillon aient fait au moins un achat ?

IV. Théorème de Tchebychev

Si Var(X) existe, on a : $\mathbf{p(|X - E[X]| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}}$

En effet,

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Exemple On jette 3600 fois un dé. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du 1 soit compris strictement entre 480 et 720.
Notons S le nombre d'apparitions du 1. S suit la loi ………………………………………

On cherche ici P(480 < S < 720) = ………………………………………………………..

Ce résultat exact ne peut être calculé en pratique, même un ordinateur très puissant ne peut calculer tous ces coefficients binomiaux pour des chiffres aussi grands.

On peut penser à approximer la loi B(3600; 1/6) par la loi ………… mais il resterait à

calculer P(480 < S < 720) = ………………………………………………………..

ce qui n'est pas évident non plus.

On a alors recours à l'inégalité de Tchebychev :

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

<u>Remarque</u> Les valeurs 480 et 720 sont symétriques par rapport à la moyenne 600 de la variable aléatoire considérée, ce sont 600 ± 120. Ce n'est pas nécessaire : on peut aussi appliquer l'inégalité de Tchebychev sur un intervalle non centré autour de l'espérance. Il suffit pour cela d'utiliser le plus grand intervalle centré sur l'espérance qu'il contient.
Minorer $P(550 < S < 700)$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

<u>Exercice</u>

On lance n fois un dé, et on note M la moyenne arithmétique des points obtenus.
a) Calculer E(M) et ν(M).
b) Combien de fois suffit-il de lancer un dé pour que, avec une probabilité supérieure à 0,9 , la moyenne arithmétique des points obtenus soit comprise entre 3,4 et 3,6 ?

<u>Exercice 1</u> : Une entreprise de transports possède 80 camions. Chaque camion a une probabilité constante "p" d'être hors service dans une journée.
L'entreprise estime que, pour appliquer son planning, elle ne doit pas avoir plus de 3 camions hors service.
1) Déterminer la loi que l'on peut appliquer à la variable aléatoire X : " Nombre de camions hors service dans une journée".
2) Supposons que l'on puisse approcher cette loi par une loi de Poisson de paramètre m. Déterminer m pour que la probabilité de n'avoir pas plus de 3 camions hors service soit au moins 0.95 (précision sur m : 0.1).
3) En déduire la valeur maximale que peut atteindre p.
4) Justifier à posteriori l'emploi de la loi de Poisson.

<u>Exercice 2</u> : Partiel U3X3 du 27 mai 2011
La densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X est définie par :
$$f(x)=\begin{cases} \lambda.\,e^{-4x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$$
1) Déterminer la valeur de λ
2) Calculer la probabilité $p(X\geq 5)$
3) Déterminer x pour que $p(X<x) > 1/2$
4) Déterminer E(X) et V(X).

<u>Exercice 3</u> : Partiel U3X3 du 27 mai 2011
Dans un aéroport, la durée d'attente X mesurée en minutes pour l'enregistrement des bagages suit une loi exponentielle de paramètre 1/10.
1) Quelle est la densité de probabilité de X ?
2) Quelle est la probabilité d'attendre au plus 30 minutes ?
3) Quelle est la probabilité que l'attente dépasse une heure ?
4) Sachant que l'on a attendu 15 minutes, quelle est la probabilité que l'attente soit encore d'au moins 15 minutes ?

<u>Exercice 4</u> :
1) Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres m et σ. Retrouver les paramètres m et σ tels que : $p(X > 80.6) = 0.0228$ et $p(X \leq 57.2) = 0.1587$. (Les valeurs demandées seront exactes avec au plus 1 chiffre après la virgule)
2) On admet que dans l'entreprise SAROULE la probabilité qu'un appel téléphonique, choisi au hasard, soit suivi d'une commande, est 0.065. Le nombre d'appels reçus dans une journée est 1000. (On suppose qu'il y a indépendance entre les issues des différents appels).
On note Y, la variable aléatoire qui, à chaque jour, associe le nombre d'appels reçus suivis d'une commande. Expliquer pourquoi la loi suivie par Y est binomiale, quels en sont les paramètres ?
3) a) On admet que l'on peut approcher la loi de Y par une loi normale. Quels en sont les paramètres ?
b) On désigne par Y' une variable qui suit cette loi normale. Calculer, en utilisant l'approximation précédente, la probabilité $p(50\leq Y \leq 70)$; on effectuera **deux calculs** : l'un sans correction de continuité, l'autre avec correction de continuité, et on donnera les résultats à 10^{-2} près , en prenant les valeurs approchées figurant dans la table.
c) Déterminer le nombre entier le plus proche a tel que : $P(64.5 - a \leq Y' \leq 65.5 + a) = 0.60$